2J1-04

複雑ネットワークとしての論理
Logic as complex network

澤　宏司[*1]
Koji Sawa

[*1] 日本女子大学附属高等学校
Senior High School, Japan Women's University

While we represent a logical connective, implication by a directed edge, the set of directed edges can be regarded as a complex network. In this study, we compose a network model which represents formal logic. There are some types of inference, however in this article, we adopt only deductive inference as a scheme of transformation of network. The proposed network model grows like BA model by Barabási and Albert. Though in BA model whole of existing network is referred when a node is added, only a part of existing network is referred in our model. In this view, our model is more realistic than BA model, however, it shows the power law.

1. はじめに

形式論理の含意関係，「A ならば C」は「A⊃C」のように表現されることが多いが，見かけ上は単なる順序つきの二項関係なので，これを「→」を使って「A→C」と表現してももちろん意味は変わらない．従って，「クジャクならば鳥」，「子猫ならば猫」，…等，世の中にあふれる含意関係を集めて含意関係の巨大な集合を考えると，それは有向の複雑ネットワークとみなすことができる．数理論理学・証明論や束論など，論理の形式的な表現は数多くあるが，それらはいずれも主に論理の代数的な構造について調べることに尽力してきたようにみえる．これに対して本報告では，論理のネットワークとしての側面に注目し，その性質を調べる．

複雑ネットワークのモデルには WS モデル[Watts 1998]，ER モデル[Erdős 1959]などいくつかの萌芽的な研究があるが，中でも今回提案するモデルにいちばん関連があるのが Barabási と Albert の BA モデル[Barabási 1999]である．BA モデルは大きく分けて，成長（growth）と，選好的選択（preferential attachment）の 2 つの性質で構成される．成長とは，文字通り，ノード（点）を 1 つずつ加えて，ノードと辺（線）で構成されるネットワークが少しずつ大きくなっていく様子を指す．一方，選好的選択とは，ノードを加えるときの辺の加え方の原則である．具体的には，ノードを加える際の既存のネットワークの各ノードが張られている辺の数に比例して，その加えられるノードと既存の各ノード間に辺を張るか否かの確率が決定される．直感的には，辺が数多く張られているノードほどますます辺を増やし，そうでないノードは辺が増えないままに留まる，という説明でよかろう．BA モデルは結果として，各ノードの次数分布（張られている辺の数と，その次数のランクの関係）にべき乗則を示す．べき乗則とはスケールフリー性とも言われ，タンパク質の代謝のネットワーク[Jeong 2000]，電気信号としてのインターネット[Faloutsos 1999]，コンテンツのリンクとしての WWW[Broder 2000]等，ジャンルを越えた様々なネットワークで見られる現象である．BA モデルがべき乗則を示すことは，BA モデルがこれらの現象と同程度に普遍的な現象を表すモデルであることを示唆する．

一般的に，論理的な推論には演繹と帰納があると言われる．本稿では我々は演繹的な推論のみを扱う．演繹の表現にはいくつかあるが，有名なもののひとつの例えは「人間は死ぬ．ソクラテスは人間である．ゆえにソクラテスは死ぬ．」のような，通常の判断ができる人間ならば誰もが認めうるものである．我々はこれを図式化し，演繹的な推論に基づく論理のネットワークの変形を構成する．

BA モデルは，新しいノードから辺を張るときに既存のネットワークの情報のすべてを参照する．ノードや辺の数が有限少数の場合には問題ないが，数千から数万以降のオーダーになる場合や，実生活のネットワークを考えると，これは強すぎる，理想的すぎる仮定のようにも思える．実際，[Gardeñes 2004]，[Náther 2009]，[Wang 2009]等，モデルの参照を局所的，有限的にする改良モデルもある．本稿のモデルでも同様に，局所的な参照，変形に留まり，BA モデルよりも現実に近い実装をする．にも関わらず，その次数分布は BA モデル同様のべき乗則を示す．この結果は，べき乗則を示す世の中の様々なネットワークの中に演繹論理，しかも系としての全体性を前提としない局所的な演繹論理を加える，新しい結果である．

2. モデル

2.1 演繹の図式化

演繹と帰納を対比して曰く，帰納は妥当でないこともあるが新しい情報が増え，演繹は逆に必ず妥当であるが情報が増えない，と言われる[戸田山 2002]．我々は演繹を図式化するにあたり，トートロジー（同語反復）からスタートする．

仕組みは非常に簡単である．集合 B についてのトートロジー的二項関係「B→B」を用意する．これは論理学では反射律と呼ばれるものであり，通常の文脈ではほぼ自明と言ってよかろう．ここで「→」の左では B の部分集合 A を考え，右では B を含むような集合 C を考える．そうすると，集合の包含関係，または論理学的な推移律より「A→C」が言える．トートロジーを変形してできたこの含意関係が妥当なものであることは，例えば B を集合「猫」として，A を「子猫」，C を「動物」とすれば理解はたやすい（図 1）．つまり，トートロジーの「左をつぶして，右をひろげる」操作でできる二項関係は新奇な情報は得られないものの妥当なものである．これは A=「ソクラテス」，B=「人間」，C=「死ぬ（もの）」とすれば前章のソクラテスの例にもぴったりと符合する．つまり，この変形は演繹の 1 つの図式的な表現である．

連絡先：神奈川県川崎市多摩区西生田 1-1-1，044-952-6711，kojisawa@mbj.ocn.ne.jp

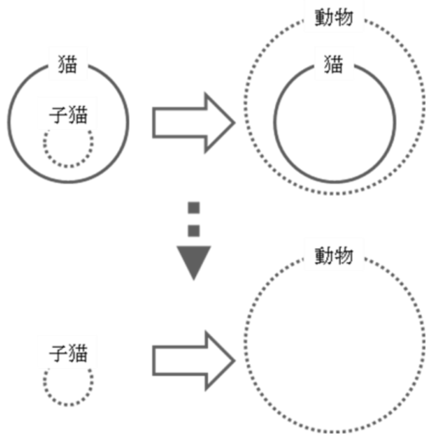

図 1:図式化された演繹.

2.2 局所的変形

BA モデルは新しいノードを付加してネットワークを成長させていくが，先述の通り，その際すべてのノードに張られた辺の数を参照する．つまりはどんなにネットワークが大きくなってもその構造を俯瞰できる視座が前提とされており，実際のネットワークとは若干かけ離れた印象がある．例えて言えば，「学校のすべての学生の友人関係を把握している先生」がいるようなものである．

我々はこの前提を採用せず，ノードの付加に際して以下のような局所的な変形を行う．

1. 既存のネットワークのあるノード p を選ぶ．
2. p のコピーp'を用意し，p との間に有向辺（向きは 0.5 の確率で任意に決定）を張る．p'は p のコピーなので，この時点では $p \rightarrow p'$ あるいは $p' \rightarrow p$ はトートロジーである．
3. $p \rightarrow p'$ あるいは $p' \rightarrow p$ に 2.1 の図式化された演繹を施す．
4. p と有向辺が張られているノードのそれぞれと，p'の間の含意関係をチェックする．
5. p と有向辺が張られているノードのそれぞれと，p の間の含意関係を再チェックする．

4, 5 にあるように，参照するノードが p と有向辺が張られているノードのみというところが，「局所的変形」たるゆえんである．それ以外のノードは一切参照しない．

2.3 ビット列による表現

2.1 では集合の包含関係を用いて「左をつぶして，右をひろげる」操作を表現したが，要は「→」の推移律さえ満たせばいいので，実際のモデルではビット列を用いて以下のように構成する．

ビット列 $a_1\ a_2\ a_3 ... a_n$ と $c_1\ c_2\ c_3 ... c_n$ の二項関係 **R** を以下のように定義する．

定義　$a_1\ a_2\ a_3 ... a_n \mathbf{R} c_1\ c_2\ c_3 ... c_n$ iff $\forall i\ a_i \leq c_i$　ただし a_i, c_i は 0 または 1

例えばビット数 4 の例で示すと，0110**R**0111 や 0101**R**1111 は成立するが，0110 と 1101 は，前から 3 ビット目が 1>0 なので **R** は成立しない．以下，2 つのビット列が $a_1\ a_2\ a_3 ... a_n \mathbf{R} c_1\ c_2\ c_3 ... c_n$ となるとき，矢印を用いて「$a_1\ a_2\ a_3 ... a_n \rightarrow c_1\ c_2\ c_3 ... c_n$」と表現する．このビット列による表現は **R** の反射律から「左をつぶして，右をひろげる」操作でできる二項関係であり，演繹を表現している．例えば 0101**R**1111 は，0111**R**0111 から左項を 0101≤0101 と「つぶし」，右項を 0111≤1111 と「ひろげて」できた二項関係だと考えることができる．図 2 はビット列で表現した，局所的変形の例である．

2.4 モデル

以上を道具立てとし，今回提案するネットワークは以下の通りに形成される．

1. 初期のノード数を m とし，各ノードは n ビットのビット列で表現されている．ノード間に二項関係 **R** がある場合にはそれに対応する有向辺を張っておく．
2. 既存のノードからランダムでノードをひとつ選び，2.2 の「局所的変形」を施す．局所的変形の過程において，同じビット列を持つ 2 つのノードが存在する場合，両方の向きに有向辺を張る．
3. ノード数が規定のノード数 N になるまで 2 を繰り返す．

3. 結果

m=2，ビット数 14，p_1=11000000000000，p_2=11000000000000，よって $p_1 \rightarrow p_2$，$p_2 \rightarrow p_1$，N=10000 とした試行の結果を示す．図 3 のとおり，出次数，入次数がべき乗則を示した．図 4 は N を変えたときのクラスター係数と平均頂点間距離を示す．クラスター係数は高い値を示し，平均頂点間距離は $\log N$ に比例する．ただし，クラスター係数や平均頂点間距離の計算はいずれも有向辺の向きを無視し，無向化したネットワークとして計算した．

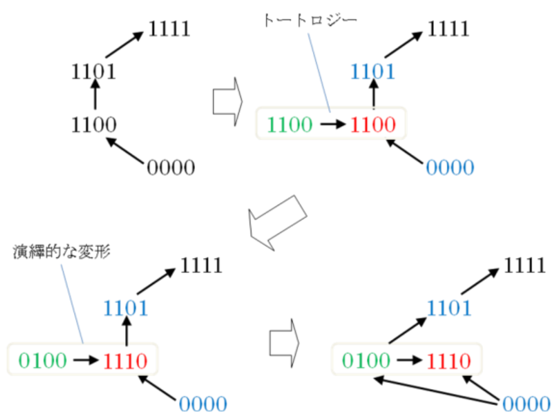

図 2：局所的変形の例．初期のネットワーク（左上）のノード p:1100（赤で表示）を選択し，コピーp'（緑で表示）を付加しトートロジーを形成する（右上）．形成したトートロジーに局所的変形を施す（左下）．新しくできた 2 つのノード p:1110 と p':0100 と，もともと p と有向辺が張られていた 2 つのノード 0000 と 1101（青で表示）と，変形された p, p'の間に二項関係 **R** が成立するかをチェックし，ある場合には有向辺を張る．局所的変形により，もともとあった 1100**R**1101 は失われた．また，この変形においてノード 1111 はまったく参照されていない．この機構が「局所的変形」のゆえんである．

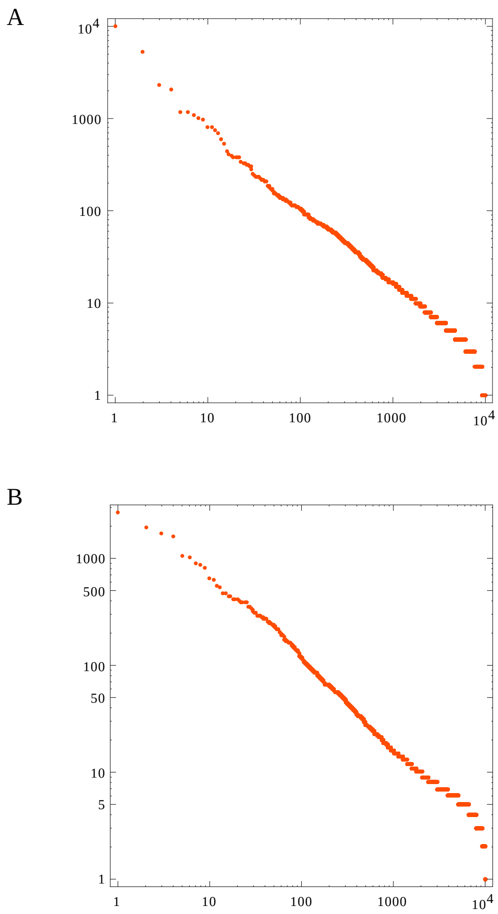

図 3：(A)出次数と(B)入次数の両対数グラフ．縦軸が各次数，横軸はランク．(A)，(B)いずれもべき乗則を示す．

4. 議論

モデルが示した結果，べき乗則，高いクラスター係数，log$N$に比例する平均頂点間距離は，ネットワークのいわゆる「スモールワールド性」と言われる．つまり今回の演繹論理をモデル化したネットワークが，世界に多く存在するスモールワールド性を満たすネットワークと同程度に普遍的である可能性を示す．そもそも「論理」は，健常な人間が正常な判断を行うときには，誰しもが使うことができるものである．いわば論理は「もっとも抽象的な計算モデル」であるので，その意味ではこの結果は当然とも思える．「論理」が「普遍的」でない場合には，それは普及しなかったのである．

論理的推論のうち，今回は演繹のみを扱った．先述の通り，推論には他に帰納がある．また，C. S. パースによれば第 3 の推論「アブダクション（仮設形成）」があるという．著者らはこれらを既に図式化しているが[Sawa 2010]，この図式化に基づけば，帰納，アブダクション共に演繹と同様に「つぶす，ひろげる」の操作で表現することができる．これらに基づく同種のネットワークの形成，分析は別の機会に公表することとする．

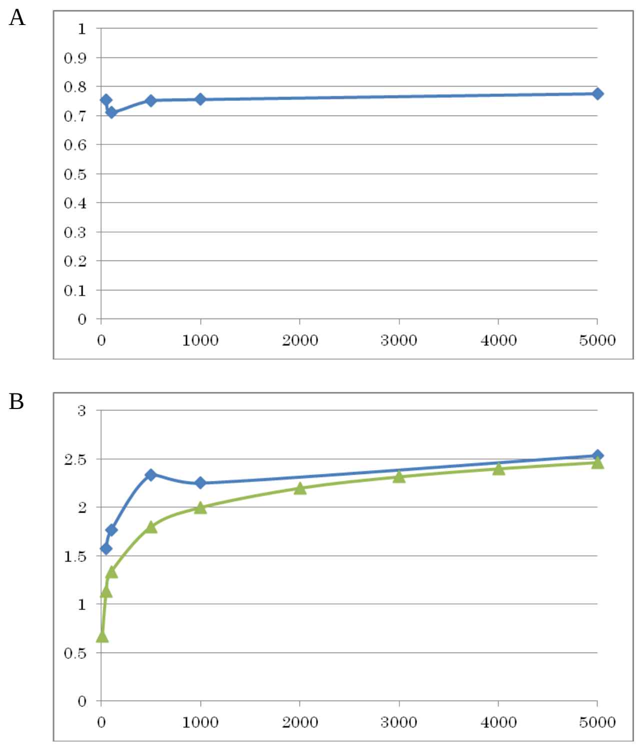

図 4：(A) N を変えたときのクラスター係数の変化．N=50，100，500，1000，5000．N を変えてもクラスター係数は高い値を維持する．(B) 平均頂点間距離の変化（青）．N=50，100，500，1000，5000．緑は 2/3 $\log_{10}N$ のグラフ．

参考文献

[Barabási 1999], Albert R.: Emergence of scaling in random networks, Science, 286, 1999

[Broder 2000] Broder A., Kumar R., Maghoul F., Raghavan P., Rajalopagan S., Stata R., Tomkins A., Wiener J.: Graph structure in the web, Comput. Netw. 33, 2000.

[Erdős 1959] Erdős P., and Rényi A.: On Random Graphs. I, Publ. Math. 6, 1959.

[Faloutsos 1999] Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos C.: On power-law relationships of the Internet topology, Comput. Commun. Rev. 29, 1999.

[Gardeñes 2004] Gardeñes J.G., Moreno Y.: Local versus global knowledge in the Baraba´si-Albert scale-free network model, Physical Review E 69, 2004.

[Jeong 2000] Jeong H., Tombor B., Albert R., Oltvai Z. N., Barabási A.-L.: The large-scale organization of metabolic networks, Nature, 407, 2000.

[Náther 2009] Náther P., Markošová M., Rudolf B.: Hierarchy in the growing scale-free network with local rules, Physica A ,388, 2009.

[Sawa 2010] Sawa K., Gunji Y.-P.: Dynamical Logic Driven by Classified Inferences Including Abduction, AIP Conference Proceedings on Computing Anticipatory Systems, 2010.

[戸田山 2002] 戸田山和久：知識の哲学，産業図書，2002.

[Wang 2009] Wang L.-N., Guo J.-L., Yang H.-X., Zhou T.: Local preferential attachment model for hierarchical networks, Physica A, 388, 2009.

[Watts 1998] Watts D. J., Strogatz S. H.: Collective dynamics of ‘small-world’ networks, Nature, 393, 1998.