

SCSat を用いたラムゼー数の下界更新について

On Improving Lower Bounds for Ramsey Numbers Using SCSat

藤田 博*1

Hiroshi Fujita

*1九州大学大学院システム情報科学研究院

Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

We solve Ramsey problems using SAT solvers. The problems are extremely hard since their CNF have thousands of variables and tens of millions of clauses making their search space huge whereas the number of models, if any, awfully small. In order to reduce search space, we consider additional constraints which can be induced by some symmetry assumptions. The added constraints may arbitrarily be relaxed if they are too strong. In this manner, we have succeeded to improve the best known lower bound for the Ramsey number $R(4,8)$ from 56 to 58.

1. はじめに

最近, Exoo が古典的ラムゼー数 $R(4,6)$ の最良下界を 35 から 36 に改善した [Exoo 12]. 本論文はラムゼー数 $R(4,8)$ の最良下界の更新に関して述べる.

古典的ラムゼー数 $R(s,t)$ とは, n 頂点の完全グラフ K_n を 2 色で如何様に辺彩色しても, 第 1 色の部分完全グラフ K_s , あるいは, 第 2 色の部分完全グラフ K_t が必ず含まれるような最小の数 n である. いくつかの興味深い例が Exoo の web サイト [Exoo], および McKay の web サイト [McKay] に掲載されている. 最近のラムゼー数に関する記録については Dynamic Survey [Radziszowski 11] に掲載されている.

Exoo は, $R(3,10)$, $R(4,6)$, $R(5,5)$ のようないくつかの興味深いラムゼー数については, 計算機を用いた方法でのみ求められるであろうと述べている. 著者は, このような目的には SAT ソルバーが有望な道具立てとなると考えている.

2. ラムゼーグラフ

我々はラムゼーグラフ [McKay] の発見を目標とする. ラムゼーグラフ $R(s,t,n)$ を具体的に示すことで, ラムゼー数 $R(s,t)$ が $n+1$ 以上であることを立証できる.

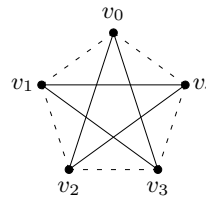
ラムゼーグラフが存在するための条件は, 以下のような CNF ($C_{(s,t,n)}$ と表し, Ramsey 節集合と呼ぶ) で表される.

$$\left(\bigwedge_{K_s \subset K_n} \bigvee_{e_{ij} \in K_s} \neg e_{ij} \right) \wedge \left(\bigwedge_{K_t \subset K_n} \bigvee_{e_{ij} \in K_t} e_{ij} \right)$$

ただし, e_{ij} は 2 頂点 i と j の間の辺の色を表す命題変数で, 真偽値が真のとき第 1 色, 偽のとき第 2 色を表すものとする. Ramsey 節集合 $C_{(s,t,n)}$ の充足性判定には, MiniSat [Eén] のような高性能 SAT ソルバーが適用できる.

しかし, Ramsey 節集合をそのまま解くのは極めて難しい. 変数の個数は $\binom{n}{2}$, 節の本数は $\binom{n}{s} + \binom{n}{t}$ で, 例えば, $C_{(5,5,43)}$ においては 903 変数, 1925196 節となる. これ位ならば十分 SAT ソルバーの適用範囲ではあるが, 莫大な探索空間において充足解の密度は極めて小さい.

連絡先: 藤田博, 九州大学大学院システム情報科学研究院,
〒 819-0395 福岡市西区元岡 744,
Tel:092-802-3609, Fax:092-802-3600,
fujita@inf.kyushu-u.ac.jp



(a) グラフ

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_0	-	0	1	1	0
v_1	0	-	0	1	1
v_2	1	0	-	0	1
v_3	1	1	0	-	0
v_4	0	1	1	0	-

(b) 隣接行列

図 1: ラムゼーグラフ $R^Z(3,3,5)$

2.1 対称性制約

そこで, 我々は所与の問題に任意に制約を付加して探索空間を削減することを考える. 簡単ながら最も効果的な付加制約の一つ (Z 制約と呼ぶ) を以下に示す.

$$e_{ij} \equiv z_k \quad (0 \leq j < i < n, i - j = k)$$

ただし, z_k ($1 \leq k \leq n-1$) は新たな命題変数である. ここでは Z 変数と呼ぶ. 以下のように CNF で表したものを Z_n と表し, Z 節集合と呼ぶ.

$$\bigwedge_{0 \leq j < i < n} ((\neg e_{ij} \vee z_{i-j}) \wedge (e_{ij} \vee \neg z_{i-j}))$$

我々は, 節集合 $C_{(s,t,n)} \wedge Z_n$ を解く*1. これが充足可能ならば, $C_{(s,t,n)}$ も充足可能で, ラムゼーグラフ $R(s,t,n)$ (Z 制約を満たす場合, $R^Z(s,t,n)$ と表し, Z ラムゼーグラフと呼ぶ) が得られる. 真偽決定すべき独立命題変数は実質的に $n-1$ に減り, 問題がはるかに易くなる. 例として, 図 1 に $R^Z(3,3,5)$ を示す.

実は, $R^Z(s,t,n)$ を得る目的には図 2 に示すような簡易プログラムで十分である. これによれば, 節集合の記憶が不要で, n が 100 程度までなら比較的短時間に計算可能である.

$zramsey(S,T,N,Z)$ は, Z ラムゼーグラフ $R^Z(S,T,N)$ の Z 変数に対する付値を求める. Z は, その付値ベクトル. $extend(I,Y,L,S,T,N,Z)$ は, 与えられた I 頂点グラフに対する付値ベクトル Y から, N 頂点グラフに対する付値ベクトル

*1 実際には Z 節集合は MaxSAT 問題と同様に WCNF (重みつき主乗法標準形) 形式で与える.

```

zramsey(S,T,N,Z) :- extend(1,[],0,S,T,N,Z).

extend(N,Z,_,_,N,Z).
extend(I,Y,L,S,T,N,Z) :-
  I < N, I1 is I+1, L1 is L+1,
  ((\+find_mck(0,T,I,Y,L), extend(I1,[0|Y],L1,S,T,N,Z))
  ; (\+find_mck(1,S,I,Y,L), extend(I1,[1|Y],L1,S,T,N,Z))).

find_mck(C,R,I,Y,L) :- find_mck_(2,1,[0],C,R,I,Y,L),!.

find_mck_(R,_,_,_,R,_,_,_).
find_mck_(X,J,V,C,R,I,Y,L) :-
  X < R, J < I, J1 is J+1,
  ( edge_color(I,J,C,Y,L),
    find_mck_(J,V,C,Y,L),
    X1 is X+1,
    find_mck_(X1,J1,[J|V],C,R,I,Y,L)
  ; find_mck_(X,J1,V,C,R,I,Y,L) ).

find_mck_(_,[],_,_,_).
find_mck_(J,[M|V],C,Y,L) :-
  edge_color(J,M,C,Y,L),
  find_mck_(J,V,C,Y,L).

edge_color(I,J,C,Y,L) :-
  D is L-(I-J), nth0(D,Y,YD), YD == C.
    
```

図 2: Z ラムゼーグラフ $R^Z(s, t, n)$ を求める Prolog プログラム

Z への拡張を試みる。L は Y の長さ。find_mck(C,R,I,Y,L) は、付値ベクトル Y のもとで、頂点 v_I および v_0 を含み頂点数 R で彩色 C のクリークが存在すれば真となる。

頂点 $\{v_{n-1}, \dots, v_0\}$ のグラフに頂点 v_n を加えるとき、辺 e_{ni} ($n-1 \geq i \geq 1$) の彩色は、拡張前の彩色 (z_{n-1}, \dots, z_1) によって既に決定しており、辺 e_{n0} の彩色を定める z_n のみが未定であることに注意。

例えば、ゴール zramsey(3,3,5,Z) に対し、Z=[0,1,1,0] を得るが、これは $(z_4, z_3, z_2, z_1) = (0, 1, 1, 0)$ を意味し、図 1 に示すラムゼーグラフに対応する。

簡易プログラム^{*2} で得た Z ラムゼーグラフ $R^Z(s, t, n)$ の最大数とそのグラフ個数を表 1 に示す。Z 制約にさらに次の制約を加えたもの (Z^s 制約と呼ぶ) が考えられる。

$$z_{n-k} \equiv z_k \quad (1 \leq k < n)$$

表 1 の最大 Z ラムゼーグラフのうち、 $R^Z(4, 8, 52)$ 以外ではすべて Z^s 制約を満たすものが存在する。

2.1.1 様々な対称性制約

Z 制約以外に以下に挙げるような様々な対称性制約が考えられる。いずれも、隣接行列 A_{ij} における規則的パターンとして表現される。

表 1: 最大 Z ラムゼーグラフ $R^Z(s, t, n)$

s \ t	3	4	5	6	7	8	9	10
3	5 2	8 2	13 3	16 7	21 13	26 13	35 4	38 21
4		17 2	24 6	33 24	46 21	52 13	68 487	91 35
5			41 22	56 12	79 49	-	-	-
6				101 2	-	-	-	-

上段: n の最大値, 下段: グラフの個数

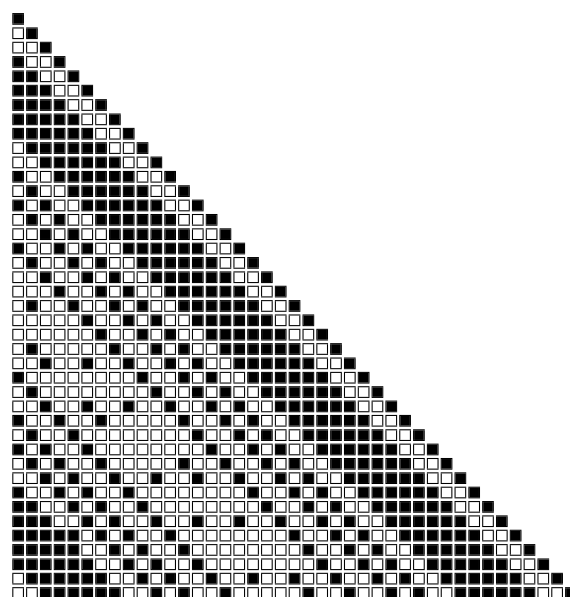


図 3: ラムゼーグラフ $R(5, 5, 42)$ の隣接行列

- 領域分割 Z 制約: 隣接行列 A_{ij} を以下の 3 通りのいずれかによって m 個の領域に分割し、領域ごとに異なる Z 変数集合 $\{Z_k (1 \leq k < n)\}_r (0 \leq r < m)$ を用いた Z 制約を課す。
 - 行番号 i の区間で分割
 - 列番号 j の区間で分割
 - $i+j$ の区間で分割 (領域境界線が副対角線に平行)

- 中抜き Z 制約: Z 制約のある Z_k に関して、あるいは領域分割 Z 制約におけるいくつかの領域に対して Z 制約を課さない。

- 市松制約: ある d について、

$$e_{ij} \equiv e_{(i+d)(j+d)}, \quad e_{(i+d)j} \equiv e_{i(j+d)}$$

- 多重市松制約: いくつかの d について多重に市松制約を課す。このとき、対応する WCNF 節には d ごとに異なる重みを設定する。

2.2 別インスタンスの利用

ラムゼーグラフ $R(s, t, n)$ を求めるにあたり、別インスタンス $R(s', t', n')$ を利用すると効果的な場合がある。

2.2.1 大インスタンスの利用

Exoo は、ラムゼーグラフ $R^Z(5, 5, 43)$ の失敗探索の結果から $R(5, 5, 42)$ を得るレシピを紹介している [Exoo]。このレシピに準じて得た解を図 3 に示す。

ただし、図は隣接行列の主対角線を除く下三角部分のみを表示。また、■は第 1 色、□は第 2 色を表す。

2.2.2 小インスタンスの利用

より小さなラムゼーグラフ $R(s', t', n')$ 、即ち $s' \leq s, t' \leq t, n' < n$ であるようなものを 1 個選び、それを拡張したグラフに関して必要な制約を作成する。特に $s' = s, t' = t-1$ のときグラフサイズの差 $n - n'$ を小さくでき、解き易くなる。

*2 実際にはより高速な C 言語版を使用。

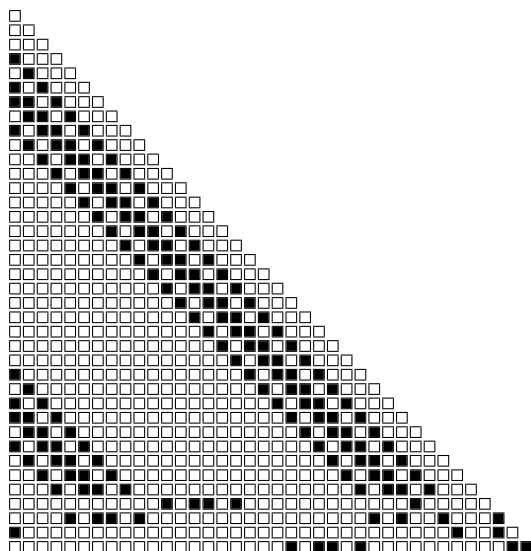


図 4: $R^Z(3, 9, 35)$ を拡張したラムゼーグラフ $R(3, 10, 39)$ の隣接行列

例えば, $R^Z(3, 9, 35)$ を拡張して図 4 に示す $R(3, 10, 39)$ が容易に得られる.

他にも, $R^Z(3, 11, 45)$ を用いて $\{R(3, 12, 49), R(3, 12, 50), R(3, 12, 51)\}$ が, また, $R^Z(4, 7, 46)$ を用いて $\{R(4, 8, 53), R(4, 8, 54), R(4, 8, 55)\}$ が比較的容易に得られる.

より大きなインスタンスとしては, $R^Z(3, 19, 105)$ を用いて $\{R(3, 20, 106), R(3, 20, 107), R(3, 20, 108)\}$ や $R^Z(6, 6, 101)$ を用いて $\{R(6, 7, 107), R(6, 7, 108), R(6, 7, 109)\}$ が得られている. ただし, これらの系列にはより大きなラムゼーグラフの存在が既知なので, 無用な結果ではある.

最近, ラムゼー数 $R(4, 11)$ の最良下界 98 を立証する既知の最大ラムゼーグラフ $R(4, 11, 97)$ の一つを, $R^Z(4, 10, 91)$ を用いて得ることに成功した.

拡張元のラムゼーグラフとしては, Z 制約を完璧に充足する必要はない. 実際, 後述の $R(4, 8, 57)$ の拡張元の $R^{Z^r}(4, 7, 48)$ は Z 制約緩和である.

3. SCSat: ソフト制約下 SAT ソルバー

3.1 ラムゼーグラフにおける対称性の破れ

ラムゼーグラフが Z 制約を充足するとは限らない. 例えば, ラムゼーグラフ $R(5, 5, 42)$ の存在は知られているが, $C_{(5,5,42)} \wedge Z_{42}$ は充足不能である. それでも, 著者は Z 制約を大部分充足し, 不完全ながらもなお対称性の高い解が存在するものと予想している. 実際, 図 5 に示すように, Z_{42} を大部分充足するラムゼーグラフ $R^{Z^r}(5, 5, 42)$ が得られている (肩付き Z^r は緩和された Z 制約を表す).

そこで, Z 制約が完璧に充足されない場合も, 何らかの基準で制約を緩和しながら探索を継続する手法が必要となる.

3.2 ソフト制約の緩和

Z 節集合のように, 所与の問題の探索空間を削減することが主目的で, それ自体の充足が必ずしも要請されないものをソフト制約と呼ぶ. ソフト制約に対する反則点付与と緩和等の機能を備えた SAT ソルバーを MiniSat[Eén] を基に開発し, SCSat と呼んでいる [Fujita]. ソフト節の最大充足を目的とする MaxSAT ソルバーとは似て非なるものである.

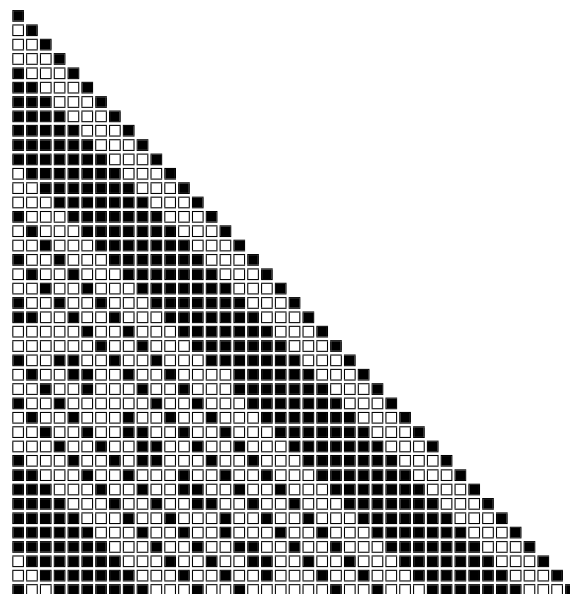


図 5: 緩和 Z ラムゼーグラフ $R^{Z^r}(5, 5, 42)$ の隣接行列

具体的には以下のように動作する.

- SCSat の search 関数における探索中, Z 節集合内にコンフリクト節が生じたとき, それを無かったものとして探索を継続する. ただし, Z 節集合内のコンフリクト節には反則点を課す.
- Z 節集合内の節が単位伝播に用いられるために全体が充足不能に至る場合がある. その場合, Z 節集合内の節で反則点の大きなものから一定個数を削除し, 探索をやり直す (search 関数のリスタート).

ソフト節 SC に対する反則点の算出には次式を用いている.

$$Score(SC) = (weight(SC) * decisionLevel())^{-1}$$

ソフト節自体がコンフリクト節となるときの他に, 一般にコンフリクトに起因した学習節の構成リテラルの導出にソフト節が関与するときにも反則点を課すことが考えられるが, 実験の結果, 格段の効果は見られない.

また, ソフト制約緩和の際, 1 回あたりのソフト節集合の削減量について, 反則点の分布等の観測を基に適切な値を求めるのが望ましいと考えられるが, 例えば, 毎回 20%削減と固定しても概ね有効である.

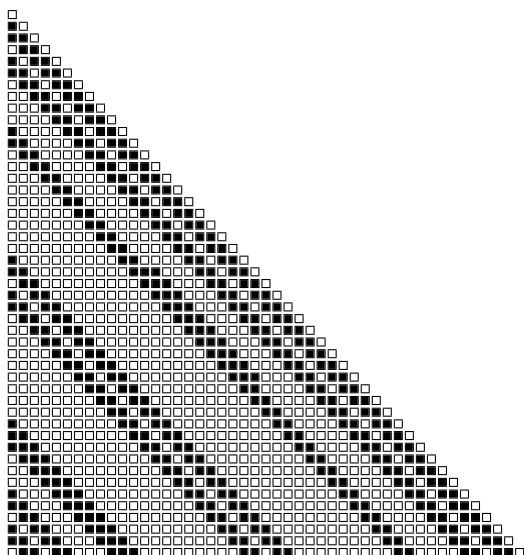
4. ラムゼー数 $R(4, 8)$ の下界更新

$R^Z(4, 7, 46)$ を起点としてラムゼーグラフ $R(4, 8, 56)$ の探索を試みているが, 未だ成功していない. 一方, $R(4, 7, 48)$ の Z 制約緩和を起点とした探索で思いがけず $R(4, 8, 56)$ および $R(4, 8, 57)$ の発見に成功した.

4.1 ラムゼーグラフ $R(4, 7, 48)$

節集合 $C_{(4,7,n)} \wedge Z_n$, $n > 46$ が充足不能であることは既に分かっているが, $R(4, 7, 47)$ および $R(4, 7, 48)$ については, Z 制約緩和手法により比較的容易に解を得ることができる.

補題 1. $R(4, 7) \geq 49$.

図 6: 緩和 Z ラムゼーグラフ $R^{Z^r}(4, 7, 48)$ の隣接行列

証明. ラムゼーグラフ $R(4, 7, 48)$ の実例の一つが, 図 6 に示す K_{48} の隣接行列で表されるものとして得られる.

4.2 ラムゼーグラフ $R(4, 8, 57)$

補題 1 に示した Z 制約緩和 $R^{Z^r}(4, 7, 48)$ を材料として $R(4, 8, 57)$ を作る. レシピは以下のとおり.

1. 辺 e_{ij} ($0 \leq j < i < 48$) を図 6 と同じに彩色する.
2. 残りの未彩色辺 e_{ij} ($48 \leq i < 57, 0 \leq j < 56$) に関して Ramsey 節集合を作成する.
3. これに Z 制約を付加して SCSat を適用し, Z 制約緩和とリスタートを繰り返す.

定理 2. $R(4, 8) \geq 58$.

証明. ラムゼーグラフ $R(4, 8, 57)$ の実例の一つが, 図 7 に示す K_{57} の隣接行列で表されるものとして得られる.

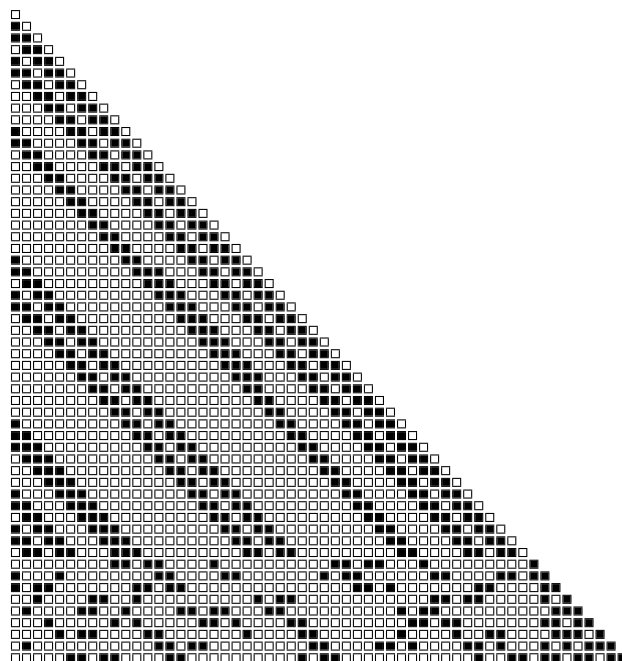
こうして, ラムゼー数 $R(4, 8)$ の最良下界が 56 から 58 へ改善された [Fujita 12]. 探索は 468 本の未彩色辺に対し, 56 個の Z 変数を導入し, 3480171 本の未充足 Ramsey 節と 936 本の Z 節に対し実行された. 計算環境は Mac OS X 10.7.5, intel[®] CORE™ i7 2GHz, 主記憶 8GB で, 計算時間は $1.87 * 10^6$ 秒 (約 21 日) であった. 1 回あたり保持 Z 節集合の 50% を削除する緩和リスタートが 2 回行われ, 最後まで保持, 充足された Z 節集合のサイズは所与の約 25% であった.

5. 結語

現在, 他のラムゼー数の下界更新を目指し, $R(3, 10, 40)$, $R(3, 11, 46)$, $R(3, 12, 52)$, $R(3, 13, 59)$, $R(4, 6, 36)$, $R(4, 7, 49)$, $R(4, 8, 58)$, $R(5, 5, 43)$, $R(5, 6, 58)$ を探索中である*3.

SCSat はラムゼー問題を解くために特別に開発されたが, 一般応用に向けて拡張版を開発中である. 特に, 所与の問題に対

*3 最良下界のためには不要だが, 提案手法によって $R(3, 13, 58)$, $R(4, 6, 34)$, $R(4, 6, 35)$, $R(5, 6, 57)$ の解決も望まれる.

図 7: $R^{Z^r}(4, 7, 48)$ を拡張したラムゼーグラフ $R(4, 8, 57)$ の隣接行列

して適切なソフト制約を人手により与えることが困難な場合に, それをソルバー側で自動的に生成する機能の確立を目指している. 現在, 入力節集合や推論中の各種情報を基に, 適切なソフト制約を自動抽出する手法をいくつか考案し, ベンチマーク問題を用いて実験評価中である.

非完全探索型 SAT ソルバーや他の確率統計的な各種手法も有力と考えられるが, これまでの実験では, 完全探索型 SAT ソルバーより優位な成果は得られていない. ラムゼー問題に関する限り, Z 制約以外の適切な対称性制約の導入こそが, 問題の早期解決の鍵となるであろう.

本稿の内容に関する詳細および関連情報については, 著者の web サイト [Fujita] を参照されたい.

参考文献

- [Eén] Eén, N. and Sörrenson, N.: The MiniSat Page, <http://minisat.se>
- [Exoo 12] Exoo, G.: On the Ramsey number $R(4, 6)$, Electron. J. Combin., **19**, #P66 (2012)
- [Exoo] Exoo, G.: Ramsey numbers, <http://ginger.indstate.edu/ge/RAMSEY>
- [Fujita 12] Fujita, H.: A New Lower Bound for the Ramsey Number $R(4, 8)$, arXiv:1212.1328 [cs.DM] (2012)
- [Fujita] Fujita, H.: Hirohi Fujita's WEB site, <http://opal.inf.kyushu-u.ac.jp/~fujita>
- [McKay] McKay, B. D.: Ramsey Graphs, <http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/ramsey.html>
- [Radziszowski 11] Radziszowski, S. P.: Small Ramsey numbers, Electron. J. Combin., DS1, <http://www.combinatorics.org/issue/view/Surveys> (2011)