0A0-00

因果的集合の中で・使用する・推論

Inference used in causal set

郡司ペギオ幸夫[*1]
Yukio-Pegio Gunij

[*1] 神戸大学・理学研究科・地球惑星科学専攻
Department of Earth & Planetary Science, Faculty of Science, Kobe University

This document describes a format guideline for Japanese manuscripts of the XXth annual conference of JSAI. This is also a sample of the formatted manuscripts.

1. はじめに

主観的時間、心理学的時間のモデルとして最も議論されてきた古典的概念は、McTaggart(1908)の時間モデルだろう。以前・以後で指定される事象の系列としての B 系列と、過去・現在・未来で指定される A 系列を構想し、我々の感得する時間はそのいずれでもないとする彼の議論は哲学的で、自然科学とは無縁に思える。しかし、事象の系列と、事象の集合によって構成される過去・現在・未来の系列とを対峙させ、時間を論じるという議論の形式は、現在も、因果集合のモデル(Markopoulou, 2000)において物理学で継承されているといえる。特に量子重力場の議論などで因果集合のモデルは現在も議論が続いている(Klugry and Sepanina, 2011)。

因果集合のモデルでは、事象を順序集合の要素として、因果的時間をモデル化する。ここで因果的時間における事象の意味を、事象の未来、すなわちその事象以後の事象の集合によって定義し、その全体を因果的時間の意味論として定義しようという提案が、因果集合モデルの全てである。このとき、因果集合は与えられるものであり、因果的時間を生きる主体は、受動的に因果を受け入れるだけだ。因果集合のモデルが観測者を導入し、そこで初めて因果集合の意味論を導入するにもかかわらず、そこに因果的時間と主体との関係は陽に現れない。

私はここで、因果集合を生きる主体は、能動的に因果集合を変更せざるを得ないこと、この主体的変更によって、因果集合は絶えず分配率—分配律の成立する比率、を上昇させること、を示そうと思う。因果的時間を生きる主体は、事象に関して論理操作を定義できる。同じく事象の意味に関しても論理操作が定義できる。各々は、因果集合の議論と独立に、Vickers(1996)によってポイント論理、オープン論理と定義されている。Vickers はここで、二つの論理の間に齟齬が生じること、この齟齬を解消するために、論理的操作に制限をつけることを提案した。

これに対してここでは、その都度、論理的齟齬を解消するように、因果集合を変化させるという、ダイナミクスを定義する。それは、「または」で結ばれた複数の事象、いわば事象の分布を、一個の事象として因果集合に付け加える操作となる。こうして因果集合は、或る条件のもとで、「または」を因果集合の一個の要素と置き換える操作を繰り返し、時間発展する。

「または」で結ばれた事象の集合を、事象とその意味の関係において置き換え可能とみなしながら因果的時間が一点につぶれないためには或る条件が必要となる。この条件のもとで因果集合を先に述べたように変えていくとき、因果集合は、分配率を上げ、分配束へ収束することになる。それはある選択肢の幅において悩んだ挙句、その選択肢の範囲の外へ目を向けるということを意味する。つまり、ラーメンかそばかを悩んだあげく、帰って寝るという選択ができることのモデルとなる。

連絡先：郡司ペギオ幸夫，神戸大学理学研究科地球惑星科学専攻，657-8501 神戸市灘区六甲台，078-803-5759，yukio@kobe-u.ac.jp

2. 局所的因果選択モデル

2.1 因果集合とその意味論

因果的時間は、事象を要素、因果的時間に関する順序を反順序関係とする因果集合 P で定義される。このとき集合 P から一つ要素 p をとってそれ以上の事象を集めるとその事象の未来が集合としてとれる。つまり p の未来とは$\uparrow p$ である。全ての点の未来に関する可能な組み合わせの和が$\uparrow P$ となる。これが因果集合の意味論となる。この意味論は、分配束となることが知られている。

2.2 ポイント論理とオープン論理

因果集合において、事象は P の要素、事象の意味（未来）は、P の部分集合となる。つまり事象とその意味は、帰属関係$\in$によって関係づけられる。Vickers(1996)の提案した一般位相システムは、集合 P、ロケール L、その間の二項関係 R によって構成される三つ組$\langle P, L, R\rangle$で定義されるが、$\langle P, \uparrow P, \in\rangle$もその定義を満たし、一般位相システムとなっている。Vickers(1996)は P と L の各々で論理操作を定義した。これはまずロケールの部分集合 S に対して

$$xR\cap S :\Leftrightarrow (\forall a\in S)\ xRa \tag{1}$$

$$xR\cup S :\Leftrightarrow (\exists a\in S)\ xRa\ . \tag{2}$$

と定義される。式(1)は論理積を、式(2)は論理和の定義をあ与えている。ロケールは位相空間の開集合の一般化であるため、ロケール上の論理はオープン論理と呼ばれる。

同様に集合の部分集合 T に対しても

$$\cap TRa :\Leftrightarrow (\forall x\in T)\ xRa \tag{3}$$

$$\cup TRa :\Leftrightarrow (\exists x\in T)\ xRa\ . \tag{4}$$

が定義される。ここでも式(3)は論理積、式(4)は論理和を表している。これは集合の要素がであることから、ポイント論理と呼ばれる。

オープン論理とポイント論理は二項関係で結ばれている。一方は要素、他方は集合であるにもかかわらず、各々論理的操作を同様に定義し、かる二項関係で結ばれるため、二つの論理の間に齟齬が生じる。これを解消することが問題となる。

特に$\langle P, \uparrow P, \in\rangle$で考える。適当な順序集合が与えられている時、次の二つは自明である。

$$a\cup b\in\{a\},\quad a\cup b\in\{b\}. \tag{5}$$

左辺は a または b のいずれかが入っていれば満たされるので、式(4)の定義より共に正しい。したがって式(5)は、表現 $a\cup b$ が$\{a\}$と$\{b\}$との両者に入っていることから

$$a\cup b\in\{a\}\cap\{b\}. \tag{6}$$

と書き換えられる。このことは式(1)の定義から明らかである。しかし式(6)は、($a\in\{a\}$ かつ $a\in\{b\}$) または ($b\in\{a\}$ かつ $b\in\{b\}$) をも意味することになる。しかしこの式は明らかに成り立たない。つまり式(6)はポイント、オープン論理間の齟齬であると理解できる。

Vickers(1996)の提案した齟齬の解消は、ポイント論理に関して任意の集合に論理和をとるのではなく、有向集合に対してだけ論理和をとるよう、制限をつけるというものだ。有向集合とは、順序集合の部分集合で、どの二つの要素よりも順序に関して大きな要素を含む集合である。このような制限をつけると、ポイント論理とオープン論理の間の齟齬は消えるが、論理操作自体が不完全な制約の大きいものとなる。

2.3 局所的因果選択のダイナミクス

ここでは Vickers(1996)の方法と異なり、論理的操作自体に制限が加えられないよう、齟齬が生じたらその都度因果集合を変化させるというダイナミクスを定義する。齟齬はポイントにおける $a\cup b$ を因果集合上の要素 $a\vee b$ に置き換えられるようにすればよい。この置き換えが可能なとき、式(6)は、

$$a\vee b\in\{a, a\vee b\}\cap\{b, a\vee b\}. \tag{7}$$

と書き換えられる。何故なら$\in$の右側にある集合は$\uparrow P$ の元であるから $a\leq a\vee b$、$b\leq a\vee b$ より a や b の含まれる集合には必ず $a\vee b$ も含まれることになる。したがって式(6)は式(7)のように書き換えられ、成立することがわかる。

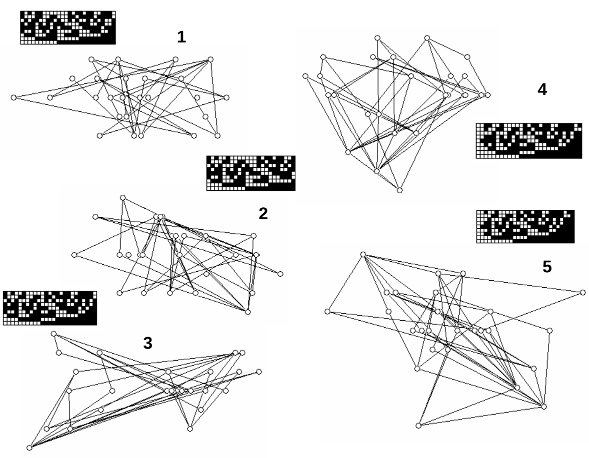

図1. 因果集合の時間発展. 数字は時間ステップ. 因果集合はハッセ図で描かれている. ハッセ図上のビット列表は因果集合を構成する要素のビット列を示す.

同様にポイント論理の論理積 $a\cap b$ についても $a\wedge b$ と置き換えが可能となるように因果集合上の要素 $a\wedge b$ を付け加えることで、論理積についての齟齬も解消される。

以上から因果集合に関するダイナミクスは以下のように定義された:(1)ランダムに 2 要素 a,b を選ぶ、(2) $a\wedge b$, $a\vee b$ が存在しないとき、これを加える、(3)第3の要素 x を選び $a\vee b\geq x$ で、$a\geq x$ または $b\geq x$ であり、さらに $a\wedge x$, $x\wedge b$ が反鎖であるときには何もせず、それ以外のときには x を取り除き、$a\geq y$ となる新たな要素 y を付け加える。条件(3)によって因果集合の時間発展は一点につぶれることを免れる。

要素をビット列でランダムに与え、因果集合の初期状態を与え、(1)~(3)に従って時間発展させた結果を図1に示す。こうして得られる時間発展は分配束へ収束することが証明できる。またその時間発展を数値計算し、絶えずランダムに 3 要素をランダムに選ぶ 100 試行中分配律の成立した割合として分配率を定義すると、分配率は急速に増大することがわかる(図2)。

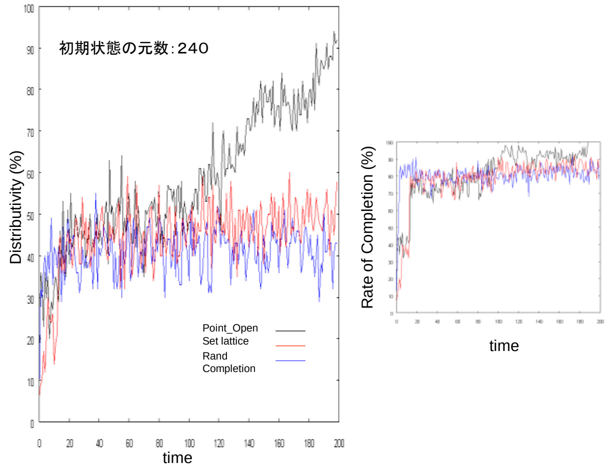

図2. 因果集合の時間発展における分配率の変化. 右のグラフは時間に関して完備性の度合いを評価したもの. 黒線が局所的因果選択ダイナミクス. 赤線は集合束化、青線は単純完備化による因果集合遷移.

この時間発展によって論理和—「または」で結ばれていた事象の集合は、一個の事象に置き換えられる。こうして得られる高い分配性は、得られる因果集合が、集合的足し合わせで理解できるものへ収束することを意味する。

3. 議論および結論

元来因果集合における Markopoulou(2000)の議論は、因果集合上に座した、全てを見渡せない観測者からの描像を与えることが目的だった。それが観測者の位置に依存した未来のような事象の集合として構成された。しかし彼女のモデルで、因果集合上で因果を観測する主体は、ただ傍観するに過ぎなかった。

本論文で提案するモデルにおいて、、因果集合上の観測者は観測し事象を対象化して論理的操作を施す内部観測者である。この計算は因果集合上の観測に関する齟齬を引き起こす。にもかかわらず人間は自由に論理計算・推論をすることが経験的にわかる。これを保障するには論理操作に制限をつけないよう因果集合を変え続けるしかない。ここにあげたダイナミクスはそれを実現する一つの方法である。

参考文献

[Klugry, 2011] Klugry AL, Sepanina IV: An example of the stochastic dynamics of a causal set. arXiv:1111.5474v1 [gr-qc] 2011.

[Markopoulou, 2000] Markopoulou F: The internal description of a causalset. *Comm.Math.Phys.*211,559-583, 2000.

[Vickers, 1996] Vickers, S. *Topology via Logic*. Cambridge Univ. Press, 1996.