

セル・オートマトンのネットワーク表現における秩序変数

Order Parameters for Network Representation of Cellular Automata

香山 喜彦 今村 泰正
Yoshihiko Kayama Yasumasa Imamura

梅花女子大学 情報メディア学科
Department of Media and Information, BAIKA Women's University

This paper studies order parameters related to self-organized criticality in cellular automata from the viewpoint of the network representation introduced in our previous works. Focusing on Conway's Game of Life, we reconfirmed its self-organized criticality by studying power-law scaling for the distributions of avalanche scales: lifetimes, sizes, and out-degrees in a rest-state network. Avalanches are caused by one-cell perturbations of the rest state. Finite-size scaling analysis shows that avalanche lifetime and out-degree can be regarded as order parameters with characteristic lengths dependent on lattice size. In particular, the distribution of out-degrees closely follows the power-law scaling. Rule *T52* of the one-dimensional binary five-neighbor totalistic cellular automata is also discussed in terms of the out-degrees of the rest-state network. Network representations of binary cellular automata can be used to assess their self-organized criticality.

1. はじめに

セルオートマトン (CA) は、グリッド上に配置されたセルの状態が、近接するセルの状態に依存した単純なルールに従って時間発展するモデルであるが、多様な振る舞いを持つものが存在し、Wolfram によるクラス分類が一般に利用されている [Wolfram 1983]。中でもクラス IV に分類される Conway のライフゲームは 2 次元のモデルとして最も有名であり、自己組織化や計算万能などとの関連から多くの研究がなされてきた。一方、我々の身近に存在する様々な複雑系は、それらを構成する要素の関係性と構造がネットワーク理論 (グラフ理論) を用いて研究されており、スモールワールド性 [Watts 1998] やスケールフリー性 [Barabási 1999] といった特徴を持つことが知られている。そこで我々は、CA の動的振る舞いをネットワークで視覚化することで、Wolfram クラスとネットワーク構造との関連性を明らかにすることを目的として「CA のネットワーク表現」を提唱した [Kayama 2010, 2011a]。[Kayama 2011a] では 1 次元の代表的なルールについて議論し、[Kayama 2011b] ではライフゲームのネットワーク表現を求めるとともに、休止状態のネットワークがスケールフリー性をもつ可能性を示唆した。[Kayama 2013] ではその議論を推し進め、統計的検定を用いて、実際にスケールフリー性を確認した。これは、Bak らによるライフゲームでの自己組織化臨界 (SOC) の確認と直接関連する結果である [Bak 1987, 1989]。また、休止状態のネットワークにおける各セルから出るエッジの数 (out-degree) が秩序変数として SOC を確認するための指標となることを示した。そこで本稿では、[Kayama 2013] の議論を紹介しながら精度を高めた結果を提示し、秩序変数としての out-degree の役割を明確にすることを目的とする。

2. セル・オートマトンのネットワーク表現

ネットワーク表現は、同一の初期配位のすべてのセルに独立な 1 セル摂動を与え、ある時間発展後に摂動の有る・無しで状

態が異なるセルをその摂動の影響を受けたものとみなし、最初に摂動を付与したセルとエッジで連結して部分グラフを求め、すべてのセルに対して得られた部分グラフを統合して定義される。摂動を付与する時刻を t_0 、そこからの時間発展を t_I とすると、ネットワークの変化はこれらを変数として表現され、ライフゲームなどの休止状態を持つルールの場合、 t_0 として過渡時間を超える値を設定すれば、休止状態に対するネットワークを求めることができる。

2.1 休止状態のネットワーク

ライフゲームの休止状態に含まれる代表的なパターンのネットワークは [kayama 2011b] で紹介した。特に重要なのは、これらのネットワークが成長を続けるものとそうでないものの 2 種類に分類できることであり、成長を続けるネットワークにより、休止状態に残ったパターン同士が結び付けられ、複雑なネットワークが構成される。ライフゲームのような複雑なふるまいを持つルールの休止状態では、微小な摂動が大きな雪崩現象 (avalanche) を生成するが、Bak らはその寿命 (lifetime) と規模 (size) を測定し、それらの分布からライフゲームの SOC を示した [Bak 1989]。同様に、我々のネットワーク描像からこれらの分布を求めると図 1, 2 のようになる。但し、 $t_0 = 10^6$ 、 $t_I = 2 \times 10^4$ 、グリッドサイズ $N = 101, 201, 301, 401$ とし、100 の初期配位をランダムに生成した。

これらのグラフは相対度数を両対数でプロットしたものであるが、元データを使って統計的にべき則に従うかを検定 [Clauset 2009] すると次のようになる。

表 1: avalanche の統計量に対するべき則の検定

data set	plausibility	x_{min}
lifetime	0.41	139
size	0.002	34

すなわち、lifetime はスケールフリー性を持つと言えるが、size については現状では否定される。これは、まだデータ量が少ないためだと考えられる。

連絡先: 香山喜彦, 梅花女子大学情報メディア学科, 大阪府茨木市宿久庄 2-19-5, 072-643-6221, 072-643-8473, kayama@baika.ac.jp

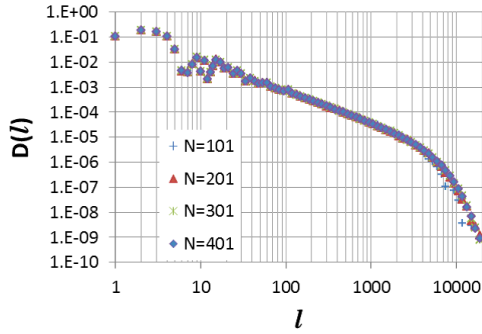


図 1: $D(l)$: lifetime の分布

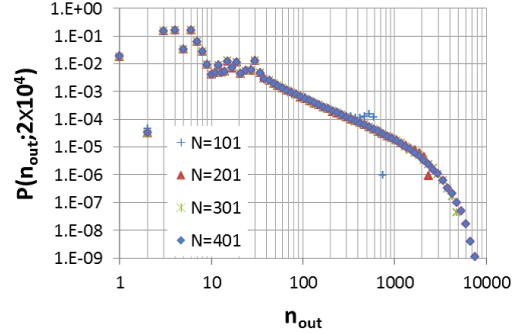


図 3: $P(n_{out}; 2 \times 10^4)$: out-degree の分布

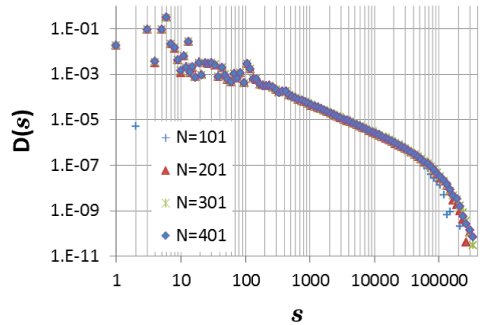


図 2: $D(s)$: size の分布

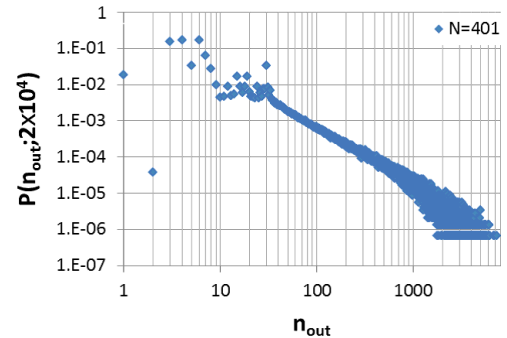


図 4: $P(n_{out}; 2 \times 10^4)$: out-degree の分布 ($N = 401$, 元データ)

2.2 Out-degree の分布

avalanche とその lifetime および size は、ネットワーク理論の枠組みで解釈すれば、1 個のノード (セル) から伸びた部分グラフが avalanche であり、その枝が成長するまでの時間が lifetime、成長過程の各時間ステップで伸びた枝の総数が size ということになる。一方、out-degree は有向ネットワークにおけるパラメータであり、ある時間においてセルから伸びたエッジの数である。言い換えれば、 t_I 時間後における振動の有る・無しで状態が異なるセルの総数であり、 t_I が lifetime 以上であれば、最終的な avalanche の規模を表現するパラメータとして適すると考えられる。実際、out-degree の分布は図 3 のようになる。

ここでも元データ (図 4) に対し統計的検定を行うと、次のようにべき則に従うことがわかる。

$$D(s, N) \propto s^{-\beta} \exp(-s/s_\xi) \quad N, s \gg 1,$$

ここで $l_\xi \propto N^a$ と $s_\xi \propto N^b$ は、それぞれ lifetime と size の特性長である。同様に out-degree についても

$$P_{out}(n_{out}, N) \propto n_{out}^{-\gamma} \exp(-n_{out}/n_\xi) \quad N, n_{out} \gg 1,$$

とおき、 $n_\xi \propto N^c$ を out-degree の特性長とする。 $N = 401$ の場合のデータを元に統計的検定を行った結果、べき則の plausibility および臨界指数は次の表のようになる。

表 3: 有限サイズ効果とべき則の検定

表 2: out-degree に対するべき則の検定

data set	plausibility	x_{min}
out-degree	0.87	166

data set	plausibility	x_{min}	scaling	critical
lifetime	0.53	148	$a = 1.52$	$\alpha = 1.82$
size	0.006	36	$b = 2.44$	$\beta = 1.84$
out-degree	0.99	75	$c = 1.32$	$\gamma = 1.74$

3. 有限サイズ効果

avalanche の lifetime と size に有限サイズスケーリング [Fisher 1972][Barber 1983] の議論を適用する [Alström 1994] .

$$D(l, N) \propto l^{-\alpha} \exp(-l/l_\xi) \quad N, l \gg 1$$

これからわかるように、out-degree は lifetime と同様に、SOC をチェックするための指標として利用できると考えられる。さらに、out-degree の場合、lifetime のように個々の avalanche の成長が止まったかどうかを確かめる必要がないので、実際の計算においても有利である。次節では、実際に out-degree を別の CA ルールに適用して SOC の検定を試みる。

4. ルール $T52$ の自己組織化臨界

論文 [Kayama 2012] では、1次元2状態3近傍ルールおよび5近傍総和型ルールの中で、ライフゲームに類似の休止状態のネットワークを持つ唯一のルールとして5近傍総和型ルール $T52$ を取り上げたが、ここでは、ルール $T52$ がSOCの例となっているかどうかを検証する。ルール $T52$ の休止状態のネットワークは図5のようなものであり、生き残ったパターンが相互に連結されている。

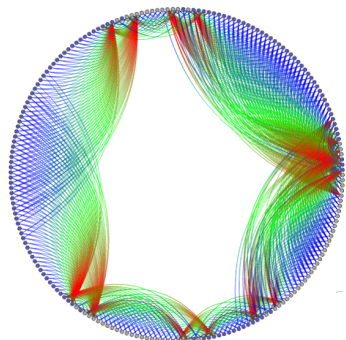


図5: ルール $T52$ の休止状態のネットワーク

このルールのSOCをout-degreeの分布によって確かめてみる。図6は $t_0 = 2 \times 10^5$, $t_f = 5000$, $N = 20001$ とし、100の初期配位をランダムに生成した場合のout-degreeの分布である。統計的検定を実施すると、べき則に従う水平軸の最小値が $x_{min} = 696$ となり、avalancheの大半でべき則に従わないことになる。つまり、ルール $T52$ のSOCは否定される。

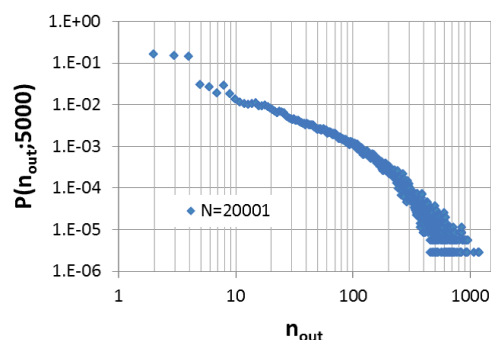


図6: $P(n_{out}; 2 \times 5000)$: ルール $T52$ の out-degree の分布

5. まとめ

BakらによるSOCの議論では砂山模型を取り上げ、その休止状態での雪崩現象に対する統計量を秩序変数とし、その分布におけるべき則が提示されている [Bak 1987]。ライフゲームでも休止状態の雪崩現象が存在し、ネットワーク表現を用いれば、その原因としての緊張状態が、休止状態に生き残ったパターンを相互に結び付ける複雑ネットワークとして視覚化される。もしライフゲームがSOCの例であるならば、休止状態のネットワークもスケールフリー性を持ち、秩序変数はべき則に従うはずである。休止状態のネットワークにおいて、1つの雪崩は1セル(ノード)を起点とするブランチグラフに

対応し、その規模を表す変数として起点セルの out-degree が最も妥当であることは明らかであろう。実際にここで示したように、out-degree の分布はべき則を示し、雪崩現象の秩序変数として適当だと考えられる。またルール $T52$ の例で示したように、他の秩序変数に比べ、より明瞭にSOCの有無を判定することができる。しかしセルのパターンに戻って解釈しなれば、out-degree とは起点セルの摂動から生じた雪崩が沈静化した後の、状態変化したセルの総数に他ならない。従って、out-degree が雪崩の規模を表すのは当然のことであり、ネットワーク理論の指標という意味付けが得られたことを除けば、ネットワーク描像でSOCを議論する利点はまだ明確ではない。今後、他のクラスIV候補のCAルールを解析することで、SOCとクラスIVの関係性を明確にするとともに、このネットワーク表現の有効性を追及することが重要な課題である。

参考文献

- [Wolfram 1983] S. Wolfram: Statistical Mechanics of Cellular Automata, Rev. Mod. Phys., 55, pp.601-644, 1983.
- [Watts 1998] D. J. Watts, S. H. Strogatz: Collective Dynamics of Small-World Networks, Nature 393, pp.440-442 1998.
- [Barabási 1999] A.-L. Barabási, R. Albert, Emergence of Scaling in Random Networks: Science 286, pp.509-512 1999.
- [Kayama 2010] Y. Kayama: Complex networks derived from cellular automata, arXiv:1009.4509, 2010.
- [Kayama 2011a] Y. Kayama: Network Representation of Cellular Automata, in IEEE ALIFE 2011 at SSCI 2011, pp. 194-202, 2011.
- [Kayama 2011b] Y. Kayama, and Y. Imamura: Network Representation of the Game of Life, Journal of Artificial Intelligence and Soft Computing Research, Vol. 1 (3), pp. 233-240, 2012.
- [Kayama 2012] Y. Kayama: Network View of Binary Cellular Automata, in Cellular Automata Springer Berlin Heidelberg, Vol. 7495, pp. 224-233, 2012.
- [Kayama 2013] Y. Kayama: Network Representation of the Game of Life and Self-organized Criticality, in IEEE ALIFE 2013 at SSCI 2013, to be published.
- [Bak 1987] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld: Self-organized criticality: an explanation of $1/f$ noise, Phys. Rev. Lett., vol. 59 (4), pp. 381-384, 1987.
- [Bak 1989] P. Bak, K. Chen, and M. Creutz: Self-organized criticality in the 'Game of Life', Nature (London), vol. 342, p. 780, 1989.
- [Clauset 2009] A. Clauset, C. R. Shalizi, and M. E. J. Newman: Power-law distributions in empirical data, SIAM Review, vol. 51, pp. 661-703, 2009.
- [Fisher 1972] M. E. Fisher and M. N. Barber: Scaling theory for finite-size effects in the critical region, Phys. Rev. Lett., vol. 28, pp. 1516-1519, 1972.
- [Barber 1983] M.N.Barber: Finite size scaling, in Phase Transitions and critical phenomena, vol. 8. Academic Press, London, 1983.
- [Alstrøm 1994] P. Alstrøm and J. Leao: Self-organized criticality in the "game of life", Phys. Rev. E, vol. 49, pp. R2507-R2508, 1994.