3F1-3

下限制約付きマッチングメカニズムの理論的設計と評価

A theoretical design and evaluation of matching mechanisms with minimum quotas

後藤　誠大[*1]　岩崎　敦[*1]　上田　俊[*1]　横尾　真[*1]
Masahiro Goto　Atsushi Iwasaki　Suguru Ueda　Makoto Yokoo

[*1]九州大学　システム情報科学府
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering at Kyushu University

We study school choice problems with minimum quotas (in addition to maximum ones). Satisfying minimum quotas is important in many real life applications including the hospital-resident matching problem. Since satisfying the standard stability becomes impossible with minimum quotas, we instead set fairness as the criteria for desired matchings. Although extended-seat deferred acceptance mechanism (ESDA) is a strategyproof mechanism that leads to fair matchings, the welfare of students obtained by ESDA is low, which is almost equivalent to a trivial mechanism called artificial caps DA (ACDA). We provide a new mechanism called ESDA+, which modifies ESDA so that more students can be assigned to popular schools. We show, with computer simulations, that the new mechanism has higher student welfare than ESDA and ACDA.

1. 序論

マッチング問題は，Gale と Shapley [Gale 96] によって安定結婚問題（Stable Marriage problem）として定式化された問題である．安定結婚問題は，同数の男性と女性の集合，および異性に対する選好リストからなる．ある男女のペアをマッチングさせた方が，そのペアの現在のマッチング結果より互いに望ましいとき，そのペアをブロッキングペアと呼ぶ．安定結婚問題の目的はブロッキングペアが存在しない，安定なマッチングを求めることである．Gale と Shapley はどのような例題においても安定なマッチングが少なくとも一つは存在することを示し，deferred acceptance と呼ばれる安定マッチングを求めるメカニズムを提案した．また，安定結婚問題の多対一マッチングへの拡張も存在し，多対一マッチングにおいても修正された deferred acceptance を用いて，少なくとも一つは存在する安定マッチングを求めることができる．多対一マッチングの具体例として，学校選択問題 [Abdulkadiroglu 03] や研修医配属問題 [Hamada 08] が挙げられる．

本論文では，下限制約付き学校選択問題について考える．学校選択問題とは，学校に学生を割り当てる問題であり，多対一マッチングとして定式化できる．学校選択問題では，各学校に割当人数に対して上限値が存在する．同時に特定の学校に学生が全く配属されないことは，学校の運営上望ましくないことから，割当人数に対して下限値が設定されることがある．この問題を下限制約付き学校選択問題と呼ぶ．同様な下限値の設定は，研修医配属問題において，離島や僻地の医療機関に，一定数の研修医の配属を保証する等の場面においても重要となる．

下限制約付き学校選択問題を解く既存のメカニズムに deferred acceptance を基にして作られた extended-seat deferred acceptance（ESDA） [Fragiadakis 13] がある．ESDA はブロッキングペアは発生しないが，多くの学生が空きシートを要求してしまう．そこで，空きシートを要求する学生の数を抑えるため，ESDA の割り当て方法を変更した新しいメカニズム extended-sest deferred acceptance+（ESDA+）を提案する．

連絡先: 後藤誠大，九州大学大学院システム情報科学府，812-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地，(092)802-3576，goto@agent.inf.kyushu-u.ac.jp

2. 下限制約付きマッチング

学校選択問題の基本的なモデルは，$(S, C, p, q, \succ_S, \succ_C)$ によって構成される．$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ は n 人の学生の集合であり，$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ は m 個の学校の集合である．$p = (p_{c_1}, \ldots, p_{c_m})$ は各学校に割り当てる学生数の下限のベクトルであり，$q = (q_{c_1}, \ldots, q_{c_m})$ は各学校に割り当てる学生数の上限のベクトルである．$p_c \geq 0, q_c > 0$ とし，すべての学校について $p_c \leq q_c$ とする．また，実現可能なマッチングを保証するため，$\sum_{c \in C} p_c < n < \sum_{c \in C} q_c$ とし，すべての学校の下限の和を超える学生の数を $e = n - \sum_{c \in C} p_c$ と定義する．各学生 s は学校の集合 C に対しての選好リスト $\succ_s$ を持っているとする．この選好リストは，厳密に順位付けされているとし，同順位の学校や順位付けされていない学校が存在しないとする．また，同様に，各学校 c も学生の集合 S に対しての厳密に順位付けられた選好関係 $\succ_c$ を持っているとする．学生の選好リストのベクトルを $\succ_S = (\succ_s)_{s \in S}$ とし，同様に学校の選好リストのベクトルを $\succ_C = (\succ_c)_{c \in C}$ とする．$\mathcal{P}$ を学生の申告可能な選好リストの集合とし，$\mathcal{P}^{|S|}$ をすべての学生の選好ベクトルの集合とする．前提として，学校の選好リストは固定され，すべての学生が知っているものとし，すべての学校がいずれの学生も受け入れ可能であるとする．

次にマッチングとメカニズムの定義およびマッチングやメカニズムに望まれる性質について述べる．マッチングとは，次の (1), (2), (3) を満たすようなマッピング $\mu : S \cup C \to 2^{S \cup C}$ である．(1) すべての $s \in S$ について $\mu(s) \in C$．(2) すべての $c \in C$ について $\mu(c) \subseteq S$．(3) すべての $s \in S, c \in C$ について $s \in \mu(c)$ かつそのときに限り $\mu(s) = c$．また，すべての $c \in C$ について $p_c \leq |\mu(c)| \leq q_c$ であるとき，マッチング μ は実現可能であるといい，$\mathcal{M}$ を実現可能なマッチングの集合とする．メカニズム $\chi : \mathcal{P}^{|S|} \to \mathcal{M}$ とは，学生の申告可能な選好リストのベクトルから，実現可能なマッチングを出力する関数である．学生が選好 $\succ_s \in \mathcal{P}^{|S|}$ を申告した場合，$\chi(\succ_S)$ はそのメカニズムによって割り当てられたマッチングである．エージェント $i \in S \cup C$ の割当を $\chi_i(\succ_S)$ で表し，$i \in S$ ならば $\chi_i(\succ_S) \in C$ は学生 s_i が割り当てられた学校であり，$i \in C$ ならば，$\chi_i(\succ_S) \subseteq S$ は学校 c_i に割り当てられた学生の集合である．

マッチングに望まれる性質として，一般的に安定マッチングが挙げられる．安定マッチングを定義するために，まず，ブロッキングペアを定義する．

定義 1 (ブロッキングペア) マッチング μ において，学生と学校のペア (s, c) がブロッキングペアであるとは，ある $s' \in \mu(c)$ について，$c \succ_s \mu(s)$ かつ $s \succ_c s'$ となることである．

学生 s は今割り当てられている学校 $\mu(s)$ より学校 c を好むとする．また，学校 c は今割り当てられている学生 s' より割り当てられていない学生 s をより好むとする．学生 s は学校 c に自分より学校 c の選好リストで下位の学生 s' が割り当てられていることに納得がいかない．このとき，学生 s が学生 s' に対して不満を持つといい，学生 s と c のペアをブロッキングペアという．ある学生が他の学生に対して不満を持つとき，その学生が不満の対象となっている学生が割り当てられている学校に対して不正な行動をとる可能性がある．したがって，全ての学校がブロッキングペアに含まれないことが望まれる．ブロッキングペアが存在しないとき，そのマッチングは安定マッチングであるという．次に，下限制約がある問題における nonwastefulness を定義する．

定義 2 (nonwastefulness) マッチング μ において，次の *(1), (2), (3)* を満たすとき，学生 s は学校 c の空きシートを要求するという．*(1)*$c \succ_s \mu(s)$ *(2)*$|\mu(c)| < q_c$ *(3)*$|\mu(\mu(s))| > p_{\mu(s)}$ 全ての学校に対して空きシートを要求する学生がいないとき，マッチング μ は *nonwasteful* であるという．

学生 s が今割り当てられている学校 $\mu(s)$ より空きシートを持っている学校 c をより好むとする．また，学校 $\mu(s)$ に割り当てられている学生の数が下限より大きいとする．このとき，学生 s は学校 c の空きシートを要求するという．この場合，上下限制約を満たしたまま学生 s は空きシートのある学校 c に移動し効用を上げることができる．したがって，空きシートを要求する学生が存在しない nonwasteful が望まれる．

安定マッチングと nonwastefulness はマッチングが満たすべき重要な性質であるが，下限制約付き学校選択問題では，一般的にその両方の性質を満たす実現可能なマッチングは存在しないことが知られている [Ehlers 12]．

最後に，メカニズムに望まれる性質である戦略的操作不可能性について述べる．どの学生においても，自分だけが嘘の選好を申告することで自分の効用を上げることができないとき，メカニズムは戦略的操作不可能という．もしメカニズムが戦略的操作不可能性を満たさない場合，自分の効用を上げるため嘘の選好リストを申告する学生が出現する可能性がある．したがって，戦略的操作不可能性を満たすことはメカニズム設計の重要な基準であると考えられる．そのため，本論文で紹介するすべてのメカニズムは戦略的操作不可能性を満たしている．

3. Extended-seat deferred acceptance（ESDA）

本章では，下限制約付き学校選択問題を解く既存のメカニズム，Extended-seat deferred acceptance（ESDA）について説明する．

ESDA ではまず，下限制約付き学校選択問題のモデルを拡張した拡張モデル $(S, \tilde{C}, \tilde{q}, \tilde{\succ}_S, \tilde{\succ}_{\tilde{C}}, \succ_{ML_C})$ を定義する．モデルの拡張において，学生の集合は変化しない．学校 c を次の 2 つの小さな学校，通常枠 c と拡張枠 c^* に分解する．通常枠 c の上限を $\tilde{q}_c = p_c$ とし拡張枠 c^* の上限を $\tilde{q}_{c^*} = q_c - p_c$ とする．拡張された学校の集合を $\tilde{C} = C \cup C^* = \{c_1, \ldots, c_m, c_1^*, \ldots, c_m^*\}$ とし，上限のベクトルは $\tilde{q} = \{\tilde{q}_{c'}\}_{c' \in \tilde{C}}$ とする．拡張モデルには下限が存在せず，拡張枠全体に上限制約 $e = n - \sum_{c \in C} p_c$ を設定し，拡張枠全体に上限より多くの学生を割り当てないことで，拡張前のモデルでの下限制約を満たすことを実現する．また，学生を割り当てていく順番を表した学校のマスターリスト ML_C を定義する．

拡張されたモデルでの学校の選好リストおよび学生の選好リストを次のように定義する．学校 c が通常枠である場合 $\tilde{\succ}_c = \succ_c$ とし，学校 c が拡張枠である場合 $\tilde{\succ}_{c^*} = \succ_c$ とする．学校 $C \cup C^*$ への選好リストは拡張前の選好リスト $\succ_s$ で学校 c_j のすぐ後に学校 c_j^* を挿入したものとする．例えば，拡張前の選好が $\succ_s$: $c_j \succ_s c_k \succ_s \cdots$ であるとすると，拡張後の選好は $\tilde{\succ}_s : c_j \tilde{\succ}_s c_j^* \tilde{\succ}_s c_k \tilde{\succ}_s c_k^* \tilde{\succ}_s \cdots$ となる．

ESDA はこのように拡張されたモデルにおいて割り当てを行っていく．学生の申込，通常枠の割り当ては deferred acceptance と同様に行い，拡張枠の割り当ては次のように行う．学校のマスターリスト順で申込のあった学生を確認していき，選好の最も高い学生を割り当てても拡張枠の上限と拡張枠全体の上限を超えないならその学生を受け入れ，どちらかを超えてしまう場合は受け入れを行わず次の学校に移る．マスターリスト順で最後の学校まできたら，初めの学校に戻りまだ受け入れられていない学生において 1 順目と同様の動作を行う．これを繰り返し，受け入れられなかった学生は拒否する．この方法で拡張枠の受け入れを行うと，自分が申込を拒否された学校には，その学校の選好リストで自分より上位の学生しか受け入れられないため，ブロッキングペアが発生しない．

Extended-sest deferred acceptance

ラウンド 1

1. 各学生は選好 $\tilde{\succ}_s$ で最も選好の高い学校に申し込む．
2. 各学校 $c \in \tilde{C}$ は，上限 $\tilde{q}_c$ まで申込のあった学生を選好順に受け入れていき，残りの学生の申込は拒否する．
3. $\mu_1(c)$ を学校 c に受け入れられた学生の集合とし，$\mu_1^* = \cup_{c^* \in C^*} \mu_1(c^*)$ を拡張枠に受け入れられた学生の集合とする．$|\mu_1^*| > e$ のとき，拡張枠に割り当てられている学生を保留にし，学校のマスターリストで上位の学校の拡張枠から順に，保留にした学生を 1 人ずつ受け入れていく．拡張枠に受け入れられる学生の数が e 人になるまで，2 順目，3 順目と受け入れを繰り返す．

ラウンド $k > 1$

1. ラウンド $k-1$ で申込を拒否された学生は，今までに申込を拒否されていない学校の中で最も選好の高い学校に申し込む．
2. 各学校 $c \in \tilde{C}$ は，ラウンド $k-1$ で受け入れた学生と現ラウンドで申込のあった学生を選好順に上限 $\tilde{q}_c$ まで受け入れていき，残りの学生の申込は拒否する．
3. $\mu_k(c)$ を学校 c に受け入れられた学生の集合とし，$\mu_k^* = \cup_{c^* \in C^*} \mu_k(c^*)$ を拡張枠に受け入れられた学生の集合とする．$|\mu_k^*| > e$ のとき，拡張枠に割り当てられている学生を保留にし，学校のマスターリストで上位の学校の拡張枠から順に，保留にした学生を 1 人ずつ受け入れていく．拡張枠に受け入れられ

る学生の数が e 人になるまで，2 順目，3 順目と受け入れを繰り返す．

次に，ESDA の動作例を示す．5 人の学生 $s_1, \ldots, s_5$ と，3 つの学校 c_1, c_2, c_3 の学校選択問題を考える．学生と学校の選好リスト，上下限制約は以下に示す通りとし，マスターリストは $s_1 \succ_{ML} \cdots \succ_{ML} s_5$ とする．

$\succ_{s_1}$	$\succ_{s_2}$	$\succ_{s_3}$	$\succ_{s_4}$	$\succ_{s_5}$
c_2	c_2	c_1	c_2	c_1
c_1	c_1	c_2	c_3	c_2
c_3	c_3	c_3	c_1	c_3

	$\succ_{c_1}$	$\succ_{c_2}$	$\succ_{c_3}$
	s_5	s_4	s_3
	s_4	s_1	s_4
	s_2	s_2	s_2
	s_3	s_3	s_5
	s_1	s_5	s_1
p	1	1	1
q	2	3	1

まず，モデルの拡張を行う．学校を通常枠と拡張枠に分解し，分解後の学校の集合を $C \cup C^* = \{c_1, c_2, c_3, c_1^*, c_2^*, c_3^*\}$ とする．各学校の上限は $\tilde{q}_{c_1} = \tilde{q}_{c_2} = \tilde{q}_{c_3} = 1, \tilde{q}_{c_1^*} = 1, \tilde{q}_{c_2^*} = 2, \tilde{q}_{c_3^*} = 0$ となる．また，拡張枠全体の上限制約は $e = 2$ となる．拡張された学校に対する新しい学生の選好リストは，拡張枠 c_j^* を拡張前の選好リストの c_j の直後に挿入することによって定義する．通常枠，拡張枠の選好リストは分解前と等しく $\tilde{\succ}_c = \succ_c \ (c \in C), \tilde{\succ}_{c^*} = \succ_{ML} \ (c^* \in C^*)$ とする．学校のマスターリストを $\succ_{ML_C}$: $c_1 \succ_{ML_C} c_2 \succ_{ML_C} c_3$ とする．

ラウンド 1 で，学生 s_1, s_2, s_4 は学校 c_2 に申し込む．学生 s_3, s_5 は学校 c_1 に申し込む．学校 c_1 は学生 s_5 を受け入れ，学校 c_2 は学生 s_4 を受け入れる．

ラウンド 2 で，学生 s_1, s_2 は学校 c_2^* に申し込む．学生 s_3 は学校 c_1^* に申し込む．学校 c_1^*, c_2^* の個別の上限を超えないため，s_1, s_2, s_3 はそれぞれの学校に受け入れられる．しかし拡張枠に受け入れられた学生の数が拡張枠全体の上限を超えるため，学校のマスターリストの順番に従い，学校 c_1^* で最も選好の高い s_3 が受け入れられ，学校 c_2^* で最も選好の高い学生 s_1 が受け入れられる．拡張枠全体の上限に達したので，残りの学生 s_2 は学校 c_2^* に拒否される．

ラウンド 3 で，学生 s_2 は学校 c_1 に申し込むが，学校 c_1 の選好で上位の s_5 が受け入れられるため，c_1 から拒否される．

ラウンド 4 で，学生 s_2 は学校 c_1^* に申し込み，ラウンド 2 と同様に拡張枠の受入が行われ，学生 s_3 が学校 c_1^* から拒否される．

ラウンド 5，6 で，学生 s_3 が学校 c_2, c_2^* に申し込むが拒否され，ラウンド 7 で学校 s_3 に申し込み，受け入れられる．すべての学生が受け入れられたため，メカニズムは終了する．

拡張後のモデルにおける最終的なマッチングは以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_1^* & c_2 & c_2^* & c_3 & c_3^* \\ s_5 & s_2 & s_4 & s_1 & s_3 & \emptyset \end{pmatrix}$$

拡張前のモデルに戻すと割当は以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \{s_2, s_5\} & \{s_1, s_4\} & s_3 \end{pmatrix}$$

学生 s_2 は今割り当てられている学校 c_1 より学校 c_2 の方が選好が高く，学校 c_2 に移動しても上下限制約に違反しない．よって学生 s_2 は空きシートを要求している．

4. ESDA の改良

本章では，ESDA の拡張枠の割り当て方法を改良したメカニズム extended-sest deferred acceptance+（ESDA+）を提案する．

ESDA+ は ESDA の拡張枠の割り当て方法のみを変更したメカニズムである．モデルの拡張および学生の申し込み，通常枠の割り当て方法は ESDA と同様に定義し，拡張枠の割り当てを次のように変更する．学校のマスターリスト順に申込のあった学生を確認していき，学校の選好順位で 1 位の学生が申し込んでいて，その学生を割り当てても拡張枠の上限と拡張枠全体の上限を超えないならばその学生を受け入れ次の学校に移る．マスターリストで最後の学校まできたら，初めの学校に戻り，次は学校の選好順位で 2 位の学生について 1 順目と同様に受け入れを行う．これを，3 位，4 位，... と繰り返していき，受け入れられなかった学生を拒否する．ESDA+ も ESDA と同様にブロッキングペアは発生しない．以下にメカニズムを記述するが，ラウンド 1，$k > 1$ の両方で動作 1，2 は ESDA と同じであるため省略し，ラウンド $k \geq 1$ における動作 3 のみを記述する．

Extended-sest deferred acceptance+

3. $\mu_k(c)$ を学校 c に受け入れられた学生の集合とし，$\mu_k^* = \cup_{c^* \in C^*} \mu_k(c^*)$ を拡張枠に受け入れられた学生の集合とする．$|\mu_k^*| > e$ のとき，拡張枠に割り当てられている学生を保留にし，学校のマスターリストで上位の学校の拡張枠から順にみていき，その学校で選好順位が 1 位の学生が保留になっていれば割り当てる．拡張枠に受け入れられる学生の数が e 人になるまで，2 位，3 位と受け入れを繰り返す．

次に，ESDA+ の動作例を示す．モデルは ESDA の動作例と同様とし，モデルの拡張も ESDA と同様に行う．

ラウンド 1 で，学生 s_1, s_2, s_4 は学校 c_2 に申し込む．学生 s_3, s_5 は学校 c_1 に申し込む．学校 c_1 は学生 s_5 を受け入れ，学校 c_2 は学生 s_4 を受け入れる．

ラウンド 2 で，学生 s_1, s_2 は学校 c_2^* に申し込む．学生 s_3 は学校 c_1^* に申し込む．学校 c_1^*, c_2^* の個別の上限を超えないため，s_1, s_2, s_3 はそれぞれの学校に受け入れられる．しかし拡張枠全体で受け入れられた学生の数が 3 になり，拡張枠全体の上限 2 を超えるので，各学校における選好順位で高い順に学生 s_1, s_2 が受け入れられ，学生 s_3 が拒否される．

ラウンド 3 で，学生 s_3 は学校 c_2 に申し込むが，学校 c_2 の選好で上位の s_4 が受け入れられるため，c_2 から拒否される．

ラウンド 4 で，学生 s_3 は学校 c_2^* に申し込むが，学校 c_2^* の上限が 2 であるので，選好順位で下位の学生 s_3 が学校 c_2^* から拒否される．

ラウンド 5 で，学生 s_3 が学校 c_3 に申し込み，学校 c_3 は学生 s_3 を受け入れる．すべての学生が受け入れられたため，メカニズムは終了する．

拡張後のモデルにおける最終的なマッチングは以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_1^* & c_2 & c_2^* & c_3 & c_3^* \\ s_5 & \emptyset & s_4 & \{s_1, s_2\} & s_3 & \emptyset \end{pmatrix}$$

拡張前のモデルに戻すとマッチングは以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ s_5 & \{s_1, s_2, s_4\} & s_3 \end{pmatrix}$$

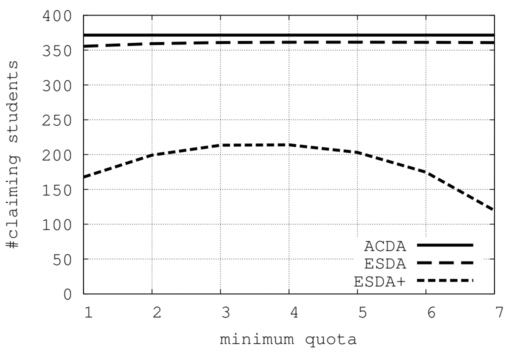

図 1: 空きシートを要求する学生数（$\alpha = 0.3$）

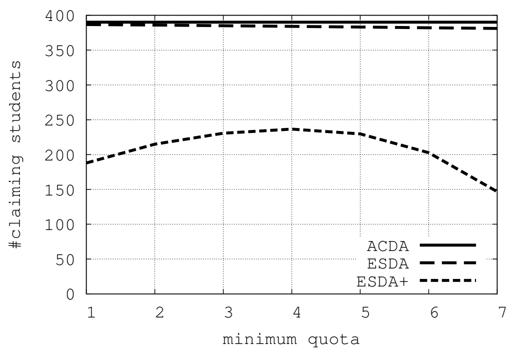

図 2: 空きシートを要求する学生数 （$\alpha = 0.6$）

学生 s_3 以外の学生は最も選好の高い学校に割り当てられており，学生 s_3 については，移動すると学校 c_3 の下限制約に違反してしまう．したがって，今回の例では空きシートを要求する学生は発生しておらず，ESDA と比べて空きシートを要求する学生を抑えることに成功した．

5. 実験

今回の実験では ESDA，ESDA+ のほかに Artificial caps deferred acceptance（ACDA）の比較を行う．ACDA とは，各学校に新しく上限制約を設定して deferred acceptance を動かすメカニズムである．新たに設定する上限制約は，各学校がその上限制約を満たせば，全ての学校の下限制約を満たすように設定する．例えば，今回の実験設定のように学生の数が 400 人，学校の数が 50 の問題の場合，上限制約を 8 に設定することで全ての学校に 8 人割り当てることができる．そのため各学校の下限制約が 8 以下であれば，下限制約を満たすことができる．学生の割り当て方は deferred acceptance と同じであるため，ブロッキングペアは発生しない．

学生の人数を 400 人，学校の数を 50 とし，学校の上限制約を 15 人とする．また，ACDA で新たに設定する上限制約を 8 とする．学校の選好リストはランダムとし，学生の選好リストは以下のように設定する．

- 全学生共通の各学校に対する評価値を 0 ∼ 49 の整数値でランダムに設定する．
- 各学生の個人の各学校に対する評価値を 0 ∼ 49 の整数値でランダムに設定する．
- $[0, 1]$ の実数 α を用いて，
  効用 $= \alpha \times$(共通の評価値)$+(1 - \alpha)\times$(個人の評価値)
  とし，効用の大きい順に並べたものを学生の選好リストとする．
- $\alpha = 0.3, 0.6$ に設定し，学生の選好の偏り度合いが小さい場合と大きい場合で比較する．

下限制約の値を 1 ∼ 7 で変化させて，ブロッキングペアとなる学生の数および，空きシートを要求する学生の数を比較する．問題数を 1000 とし，各値に対し平均をとる．

実験結果を図 1，2 に示す．縦軸は空きシートを要求する学生の数，横軸は下限値となっており，図 1 は $\alpha = 0.3$，図 2 は $\alpha = 0.6$ のときのグラフである．どちらの場合も ESDA は空きシートを要求する学生の数が ACDA とほとんど変わらないのに対し，ESDA+ は ACDA と比べて空きシートを要求する学生の数を約半数に抑えている．また，空きシートを要求する学生の数が少ないほど学生がより選好リストで高い学校に割り当てられている傾向があり，学生の割り当てられている学校の順位に関しても，ESDA+ の方が ESDA より高くなっている．

6. 結論と今後の課題

本論文では下限制約付き学校選択問題を解く新しいメカニズムである ESDA+ の提案を行った．ESDA+ は ESDA の拡張枠の割り当て方法を変更したメカニズムであり，空きシートを要求する学生の数を ACDA，ESDA と比べて半分ほどに抑えることに成功した．現在は個々の学校にのみ上下限制約が存在する問題を扱っているため，今後の課題として，上下限制約に地域制約が存在する問題等への ESDA+ の適応および拡張が挙げられる．

参考文献

[Abdulkadiroglu 03] Abdulkadiroglu, A. and Sonmez, T.: School Choice: A Mechanism Design Approach, *American Economic Review*, Vol. 93, No. 3, pp. 729–747 (2003)

[Ehlers 12] Ehlers, L., Hafalir, I. E., Yenmez, M. B., and Yildirim, M. A.: School Choice with Controlled Choice Constraints: Hard Bounds versus Soft Bounds (2012), mimeo

[Fragiadakis 13] Fragiadakis, D., Iwasaki, A., Troyan, P., Ueda, S., and Yokoo, M.: Strategyproof Matching with Minimum Quotas, mimemo (2013)

[Gale 96] Gale, D. and Shapley, L. S.: College Admissions and the Stability of Marriage, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 1, pp. 9–15 (1996)

[Hamada 08] Hamada, K., Iwama, K., and Miyazaki, S.: The hospitals/residents problem with quota lower bounds, in *Match-Up: Matching Under Preferences. Algorithms and Complexity, Satellite workshop of International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, pp. 55–66 (2008)