The 27th Annual Conference of the Japanese Society for Artificial Intelligence, 2013

2D4-OS-03a-3

算数･数学の課題の意味を獲得する機械について
On acquiring meanings of math problems by a machine

岩間　憲三[*1]
Kenzo Iwama

*1(有)ジーエー

ZA Corp.

This paper describes a machine that acquires how to solve math problems; in particular, it explains how symbols, originally symbolizing linguistic letters or visual marks, come to symbolize numerical values. Given examples of solving math problems, the machine forms varProcs that describe how to solve the math problems. The paper argues meanings of math sentences consist in varProcs formed by the machine.

1. はじめに

哲学者(ex., Frege)たちは，文の意味は，文が指すことにあるとした．そして，文の真偽は，それを判断する手順にあるとした．数学者の[阿原 2011]は，たとえば，"兄と弟が合わせて 60 個のどんぐりを拾った．兄は弟の 2 倍拾った．兄と弟，それぞれ何個拾ったか．"における算数的な意味は，"60 を 3 で割ればいい"，"なぜ 3 で割ればいい"か分かれば，この課題の意味が分かったとする．

[岩間 2012]は，機械が算数的な意味を表す方法を提案し，上の例の場合には，機械が"同じ量のどんぐりを含む 3 つのまとまりがあること，3 つのまとまりを合わせると 60 個になることを求めること"を示した．また，[iwama 2006]は，文を構成する音(そして動作)のシンボルがどのようにして数のシンボルになるかの例を示した．

しかし，機械が，音(そして動作と視覚)シンボルを得ると，どのように数のシンボルとするか，そしてシンボルと文の意味がどのような関係になるか，体系だっていない．あるいは，どのように，’＋’や’－’などの視覚シンボルを演算を表すシンボルと見なすようになるか，数直線を数量を指すシンボルと分かるようになるか示していない．

ここでは，音(そして動作と視覚)のシンボルが，どのようにして"数える"を表すシンボル，さらに数量を表すシンボルになるかを議論する．はじめ，"1,2,3"などは，音のシンボルであり，"〇や△"などは，何か物を指す視覚シンボル，そして数直線は，視覚シンボルである．いわゆる経験を通して，"1,2,3"などが，数える"1,2,3"に，数直線が，数量を表すシンボルになるかを示す．そして，抽象化した音(そして視覚と動作)のシンボルの組み合わせ/並びが，数える，四則演算，いわゆる文章題，そして代数の課題の意味になると議論する．

2. 文 / シンボルが指す変手

2.1 算数の文の意味

ここでは，機械が文の意味を獲得したというのは，機械が獲得したことを他の同類の文に応用できたこととする．応用ができる根拠を，[Venn 1907]は帰納法を支える前提，世界はユニフォームだと信じていること，におく．そして，帰納法に，3 段階あると議論した．

1) detect the property to be generalized, 2) generalization,
3) verification.

しかし，入力中に情報を見出す観点での議論がない．その観点は，同時，同場所，同値，同まとまりなどで，同時，同場所などに情報があり，それを機械は取り込む．あるいは，verification のみでなく，異なっているときに property を改版する観点もない．[岩間 2013]は，改版する仕組みが内省を生み出すと議論している．

さて，応用ができる例を示す；まず，以下のようないくつかの入力があるとする．〇△などは音 / 視覚のシンボルで，✔は動作のシンボルである．

例1)
"〇はいくつある．”
“〇〇”
“　✔”
“1　〇〇”
“　　✔”
“2　〇〇”
“2 つある．"

例 2)
"△はいくつある．”△△”．〇のときと同じシーケンスが続く．

そして，応用ができるとは，新しい入力，

"□はいくつある．□□．"

を得た後，機械が獲得した数える手順を続け，"2 つある"と出力することだ．"3, 4, 5"などでも，いくつかの入力，"〇はいくつある．〇〇〇"を得ると，”3 ある”，そして，4，あるいは 5 を出力するようになると，文"･はいくつある．･･･"の応用ができるようになったとする．ここで，”･”は抽象化した視覚シンボルを表す記号とする．

2.2 変手

"2 つある"などと出力するようになるのは，いくつか入力例を得て，機械が，新たな入力に対応できる仕組みを作っているからだ．新たな入力があると，記録した仕組みを取り出し，仕組みをその入力に合わせ，出力する．数える場合には，何を数えるかが抽象化されている．

連絡先：iwama@whatisthis.co.jp

“・はいくつある．””・・”

✔

“1”　・・

✔

“2”　・・

“2 つある”

"・"は，抽象化した音 / 視覚シンボルを指し，変値と呼ぶ．作った仕組みを変手と呼ぶ．その理由は，仕組みの中に多くの関係が埋め込まれ，多くの手のように見えるからだ．たとえば，上で 2 は，関係”同じ”で結ばれる．

数のシンボルを獲得後，具体的な数を値は決まっていないが何か数とするときも，何か数を変値と呼ぶ．

新たな入力があると，入力にある，いくつかの音（視覚）のシンボルは変値に置き換えられることで，合う変手を取り出す．取り出された変手にある関係を使って，変値を具体値に置き換える．そうすることで，新しい入力に対応し出力する．

2.3 足し算そして数量の間の関係

足し算の入力も数えると似たように音と視覚と動作のシンボルの並びだ．一例を示す．

"◯がここに 2 つ，そこに 3 つある．合わせていくつか．”
“ここ◯◯　そこ◯◯◯”．
(場所を表す記号は簡略化している)．
“ 1　✔”
“ ここ◯◯　そこ◯◯◯”
“ 2　✔”
“ここ◯◯　そこ◯◯◯”
“1　✔“
“ここ◯◯　そこ◯◯◯”
(略)
“3　✔”
“ここ◯◯　そこ◯◯◯”
“合わせる”　(合わせる動作をモデル化)
“ここ　◯　そこ◯◯◯”
“◯”
“ここ　そこ◯◯◯”
“◯◯”
“ここ　そこ　◯◯”
“◯◯◯”
(略)
“ここ　そこ　”
“◯◯◯◯◯”
“1✔”　(全体を数える)
“◯◯◯◯◯”
(略)
“5　✔”
“5◯◯◯◯◯”
“合わせると，5”

これらが入力されると，合わせるといくつ，そして足し算の変手を作る．大きな数も，数えることができる限り，どんな値であっても合わせていくつができるようになる．そこで，何か視覚のシンボルがまとまった数量を表すような変手を作ることができる．

機械は，あらかじめ，数量が小さい場合には，2 つのまとまりに関係同じを見出す機能があるとする．少ない数を数える時，元から持つ同じと音のシンボル”同じ”を対応づける．つまり，”同じ”の変手を作る．その後，作った変手を，数量が多くなる場合にも”同じ”を見出す変手に拡張する．

例)
〜〜
20
〜〜
20
〜〜
20
3 つ合わせて
〜〜　〜〜　〜〜
20　20　20
同じ　同じ

以上の入力があると，それぞれの間に関係”同じ”を見出し，関係を含んだ記録を保持するようになる．

また，桁と繰り上がりの方法を獲得すると，延々，数えることを続けることができるようになる．

次に，数直線の例を示す；

“姉のおはじきは，妹のおはじきより 3 つ多い．妹のおはじきは，9 つ．姉のおはじきと，妹のおはじきを，合わせるといくつ．”

この文に続いて，数量を表した数直線，および数直線と対応するように 9 と 3 を入力する．入力を得ると，機械が，量の間に”同じ”を見出す．

もとの文は，”姉は妹より 3 つ多くのおはじきを持っている．妹のおはじきは 9 つ．姉のおはじきと，妹のおはじきを合わせるといくつか．”だ．この文を，人が上に記した文にする．ここでは，自然言語の多様性を課題にしない．

姉のおはじき
———　—
3　同じ
妹のおはじき
———

姉のおはじき
———　—
9　3　同じ
妹のおはじき
———
9　同じ

合わせると
———　—　———
9　3　9
9+3+9=21

これらの例から，数量の間の関係と足し算の関係を得る．それら関係を変手とすることができる．

そこで，次の例が入力されると，

“きよしくんのかきと，たけしくんのかきを合わせると 25 個．きよしくんのかきは，たけしくんのかきより 3 つ多い”，変手を使い，数直線と足し算を描くことができる．

きよしくんのかき
ーーーー　ー
たけしくんのかき
ーーーー

きよしくんのかき
ーーーー　ー
□　　　3　　　　　同じ
たけしくんのかき
ーーーー
□

合わせると　　　　　同じ
ーーーー　ー　ーーーー
　　　　　3

□+3+□＝25

次のような文と数直線による数量の関係を入力する．“たろうくんのみかんは，10 個．はなこさんのみかんは，たろうくんのみかんの 2 倍だ．2 人が持っているみかんは，合わせていくつか．”

たろうくんのみかん
ーーー
10　　　　2 倍
はなこさんのみかん
ーーー　ーーー
　　　　　　　同じ

合わせて
ーーー　ーーー　ーーー

同じ　同じ

これらの例から，数量の関係を式にすれば，□＋□×△＝◎，となる場合を，数直線の間における関係で表した変手を作る．これらの例では，□と△の値は決まっていて，◎の値を求める．

上記した記録と前ページの〜〜を 3 つ合わせる記録とから，3 つ合わせることが取り出される．すると，10×3 の式が取り出される．

セクション 1 で記した課題では，△と◎の値が決まっていて，□を求める．作った変手にある数直線の関係を，この課題に適応する．

60 個に，同じまとまりがいくつかあるが，すでに記録した〜〜の場合と図が合致することで，3 つ合わせることが得られる．すると，ひとつのまとまりは，20 個となることを得る．だから，兄は 40 個，弟は 20 個となる．

兄のどんぐり
ーーーーーー
弟のどんぐり
ーーー
合わせて
ーーーーーーーーー
60

兄のどんぐり
ーーー　ーーー
弟のどんぐり
ーーー　　　　　　2 倍

合わせて
ーーー　ーーー　ーーー
60
同じ　同じ

＋などの意味は，"･＋･･"に続き，"･"が指定する数だけと"･･"が指定する数だけを合わせて数え上げる変手にある．数え上げを繰り返すと，数え上げを経ないで，すでに作成した結果だけを出力するようにする．

2.4 音 / 視覚シンボルが数のシンボルになる

記録中に多くある音/視覚シンボルを選び，選んだ音/視覚シンボルを含む変手を集める．集まりは，音/視覚シンボルが指す変手の集まりとなる．結果，その集まりは，音/視覚のみだった意味に加え，それらシンボルが数の意味も表すようになる．

3. 機械の仕組みと機能

3.1 全体像

機械は，いくつかのチャネルから音 / 視覚 / 動作シンボルの形で入力を得る．

算数の課題を行う：
何と何を合わせる，何を分ける，・・・

視覚 / 動作シンボルと音(文字列)の間の対応：
○，□，✔動作と“いくつ”，・・・

感覚と運動の機能

“いくつ”　|　|　□□　|　同じ

機能は以下の通りである．

1) 外から複数のチャネルを通して入力を得る．

2) 入力と合うすでに作った変手を取り出し，それら変手を統合し，入力を分析する(入力を区切ることも含め).

3) 取り出した変手にある手順をやる，やらない，中断など，手順を駆動 / 中断，あるいはやめる. このとき，駆動 / 中断 / やめるための評価を，それまでにある変手を使って行う.

4) 入出力と取り出した変手を記録する. それまでに作った変手で，はじめは入力と合うので記録から取り出したが，以後の入力と対応しない時は，入出力と取り出した変手を合わせて記録する.

5) 記録に共通することを見出し(抽象化し)，記録の間で整合がとれるように，変手を作る.

6) 取り出した変手にはあるが，入力に，それに対応するものがなければ，変手にある内容を出力する.

3.2 数直線を扱う変手

"－－－－"などの数量を表す入力を得ると，そのまま－を記録場所に入れて記録する. 数量が"同じ"になるところ，そして"多い"および"少ない"を見出し，関係"同じ"，"多い"，"少ない"を記録する. 数直線上の操作を，そのまま記録する. 機械は，－の並びと数量を結び付け，関係も結びつけて記録するが，抽象化するとき，次に述べるように，－を記録場所に入れる変手を作る.

数量がどれだけか決まらないとき，はじめて数直線を取り入れたときの数だけの－を置く(記録場所に入れる)ことで数直線を描く. これと異なる数直線を描くときは，異なる記録場所に－を入れる.

"合わせる"があれば，2 つの記録場所の他に，もう一つ記録場所をとる. そして，2 つの記録場所にある－を，とった記録場所に，2 つの記録場所にある－を－がなくなるまで順に移す.

"分ける"があれば，分けるだけの記録場所をとり，それら記録場所に，－が入っている記録場所から，－がなくなるまで順に－を移す.

関係"同じ"があれば，2 つの記録場所にある－が同じになるように－を置く. "多く"があれば，－を追加して置く. "少ない"があれば，－を減らして置く.

記録場所に－が並んであれば，それをまとまりとして扱う. そして，2 つの記録場所にある－が同じだけあれば，まとまりとして"同じ"とする.

3.3 “代わりにそう書く”という変手

"‥"が，その中にあるような文に続き，

"‥の代わりに，。。と書く. "という入力の後に，

"‥"が"。。"に代わったような入力があるとする.

こうした例がいくつかあると，"‥の代わりに，。。と書く"の変手が作られる.

これにより，特に，数直線"－－"をいわゆる変数"x"におきかえができるようになる.

4. おわりに

4.1 教育的な観点で言えること

物理学者の江沢は，算数の文章題を解くことの重要性を説いている. 重要な理由は，ここでの議論でより具体的に言えそうだ. それらは，1)数量のまとまりとして，何と何が同じかを見つけ，2)まとまりとして同じものが，いくつあるか見つけること，あるいは，3)まとまりとして同じものを置き換えを見つけることだ. そして，見つけるために，自分で抽象化を行って型を作り，その型を他の文あるいは数直線から離し，使えるようにするからだ. さらに，記録から取り出して使った結果，見つけるという変手を取り出せるように，目的あるいは解いた結果成り立つ関係を記すことだ.

方程式を立てて解くときは，式を立てるとき以外は，機械的な操作を行うだけとなる. 実際，上記の手順は機械的に解く手順に置き換えられる. いわば，考えることが少なくなる.

4.2 獲得するシンボルとプログラムのシンボル

音(言語)そして視覚シンボルが，どのようにして数のシンボルになるか述べた. これらシンボルと，プログラムを書くときのシンボルとはどのように関係しているのか.

[Baum 2003]は，”How can computer programs, which are purely syntactic, come to have semantics? How can symbols within a program come to mean something in the world? What is understanding?” と問いかけ，今の計算機プログラムはシンタックスを，その上で動くニューラルネットがセマンティクスを表す可能性を議論した.

しかし，[Baum 2003]の議論は不十分だ. なぜなら，シンボルの並びというか記号の並びはシンタックスに従うとして，それらシンボルあるいは記号がセマンティクスを表すニューラルネットとどのように関連するか述べていないからだ.

そもそも，何か意味を伝えることが，言語本来の役割であって，その役割の一端をシンタックスが担うとすれば，シンタックスだけ切り離せるとは思われない. シンボルあるいは記号の並びがあるときは，その裏に，それが意味することが前提となっている. 今の計算機プログラムが意味することは，計算機の電気的な状態であって，その状態と計算機外の世界の状態を対応付けるのは人が行っている.

ここで示した機械の機能は，[岩間 2013-2]の議論を支える. すなわち，機械が，それが指すところを獲得する，因果関係を電気的状態の遷移で表す，シンボルと，機械が世界のシンボルを獲得するように電気的な状態遷移をすることを記すときに使うシンボルがあるという議論だ.

4.3 今後の課題

多くの課題がある. 1 つは，単一のシンボル，〇など，から数直線が指す意味を獲得する過程を明らかにすることだ. 1 つは，数直線に方向(数直線上の動作)を入れることで，正負を表すこと，方向がある数直線の組み合わせによって座標系を作る仕組みを開発することだ.

参考文献

[阿原 2011] 阿原一志:大学数学の証明問題　発見へのプロセス，東京図書，2011.

[岩間 2 2013] 岩間憲三: 算数･数学の課題の意味を獲得する機械と再帰的関数について，第 27 回人工知能全国大会，2013.

[岩間 1 2013] 岩間憲三: 内省する機械を構築する試みについて, 第 40 回知能システムシンポジウム, 2013.

[岩間 2012] 岩間憲三: 文章題の算数･数学的な意味を獲得するツール, 第 26 回人工知能学会全国大会，2012.

[Baum 2003] Baum, E.: What is thought? 2003.

[Iwama 2006] Iwama, K.: A robotic program that acquires concepts and begins introspection, NeuroQuantology, 2006

[Mitchell 1997] Mitchell, T. M.: Machine learning, McGraw Hill Co., 1997.

[Venn 1907] Venn, J.: The principles of Inductive Logic , Chelsea Publ. Co., 1907.