

Multi-MaxSATにおけるバンドル法の効果

An Effect of the Bundle Method in Multi-MaxSAT

花田 研太

Kenta Hanada

平山 勝敏

Katsutoshi Hirayama

神戸大学大学院海事科学研究科

Graduate School of Maritime Sciences, Kobe University

Multi-MaxSAT is the weighted Max-SAT solver that is based on Lagrangian decomposition. It exploits the subgradient method to solve the dual. In this paper, we explore the possibility of bundle method, which is known to have better convergence property, in dual solving of Multi-MaxSAT.

1. はじめに

充足可能性判定問題 (SAT 問題) は, 命題論理式が真となるような真偽値の割当てが存在するかどうか判定する問題である. 真か偽で表された論理変数をリテラルと呼び, リテラルの選言を節と呼ぶ. SAT 問題は標準連言形式 (CNF 形式) で与えられ, 節の連言で表現される. 重み付き最大充足化問題 (重み付き Max-SAT 問題) は SAT 問題を最適化問題へ拡張した問題である. 重み付き Max-SAT 問題の目的は, 偽となる節から発生する重みの総和を最小化することである.

Multi-MaxSAT は, 重み付き Max-SAT 問題に対するヒューリスティック解法の 1 つである [黒田 09]. Multi-MaxSAT では, ラグランジュ分解というテクニックを用いて問題を分解し, 元の問題よりもサイズが小さい重み付き Max-SAT 問題を繰り返し解くことによって原問題の最適値を探索する. Multi-MaxSAT の特徴は, 0-1 整数計画問題からのアプローチであること, また, 原問題に対する下界を与えることである.

より良い下界値を得ることは問題を解く上で重要な情報をもたらす. Multi-MaxSAT では, より良い下界値の探索には劣勾配法を用いていた. しかし, 劣勾配法は計算コストが小さい反面, 下界値が収束したかどうか判定できない, 解の振動が発生するなど問題点が多い. そこで本研究では, 下界値が収束したかどうかを判定でき, 一般には劣勾配法よりも収束が速いとされるバンドル法 (安定化切除平面法) [Schramm 92] を Multi-MaxSAT に適用し, その効果を検証した.

2. 重み付き Max-SAT 問題

2.1 0-1 整数計画問題

重み付き Max-SAT 問題を 0-1 整数計画問題として定式化すると, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{j \in C} w_j (1 - y_j) \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i \in L_j^+} x_i + \sum_{i \in L_j^-} (1 - x_i) \geq y_j, \forall j \in C, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in V, \\ & y_j \in \{0, 1\}, \forall j \in C. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, $V = \{1, \dots, m\}$ は論理変数集合, $C = \{1, \dots, n\}$ は節集合, $L_j^+ \subseteq V$ は節 $j \in C$ に含まれる論理変数のうち真のリテラルの集合, $L_j^- \subseteq V$ は節 j に含まれる論理変数のうち偽のリテラルの集合, $w_j \in \mathbb{N}$ は節 j が偽である場合にかかる重みである. また, x_i は論理変数 $i \in V$ が真のとき 1, そうでない場合は 0 に設定される決定変数, y_j は節 j が真の場合に 1, そうで無い場合は 0 に設定される決定変数である. 式 (1) は節を表す制約式である. なお, この問題は NP 困難であることが知られている. 以降, 紙面の都合上 0-1 制約を省略する.

2.2 Multi-MaxSAT

Multi-MaxSAT は, ラグランジュ分解を用いた重み付き Max-SAT 問題に対するヒューリスティック解法である.

ラグランジュ分解では, 原問題を複数の部分問題に分割する. まず, 節集合を k ($2 \leq k \leq n$) 分割する場合, $S = \{1, \dots, k\}$ として重み付き Max-SAT 問題を以下のように再定式化する.

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{j \in C} w_j (1 - y_j) \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i \in L_j^+} x_i^s + \sum_{i \in L_j^-} (1 - x_i^s) \geq y_j, \forall j \in C_s, \forall s \in S, \\ & x_i^s = x_i^t, s < t, \forall s, t \in S, \forall i \in V_s \cap V_t. \end{aligned} \quad (2)$$

ここで, x_i^s, x_i^t は部分問題 $s, t \in S$ が保持する論理変数 i の決定変数, C_s は部分問題 s が保持する部分 (問題) 節集合, $V_s, V_t \subseteq V$ は, 添え字の部分問題に含まれる論理変数の集合である. $\emptyset \neq C_s \subset C$ とし, 原問題の節はいずれか 1 つの C_s に必ず属しているものとする. すなわち, C_s は互いに素な集合である. 式 (2) は, 部分問題間の変数の値を一致させる制約で, 一致制約と呼ばれる. ここで, 少なくとも 1 つ以上の一致制約が存在する論理変数を共有変数と呼ぶ. 2.1 節の定式化との違いは, 部分節集合毎に固有の決定変数を使用し, 部分節集合間に一致制約が存在することである.

部分節集合は互いに素なので, 一致制約を取り除けば部分問題毎に原問題を分解できる. そこで, 一致制約 (2) をラグランジュ緩和すると,

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{j \in C} w_j (1 - y_j) - \sum_{\substack{s \in S \\ (s < t)}} \sum_{t \in S} \sum_{i \in V_s \cap V_t} \mu_i^{(s,t)} (x_i^s - x_i^t) \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i \in L_j^+} x_i^s + \sum_{i \in L_j^-} (1 - x_i^s) \geq y_j, \forall j \in C_s, \forall s \in S, \end{aligned}$$

連絡先: 花田研太, 神戸大学大学院海事科学研究科, 〒658-0022 神戸市東灘区深江南町 5-1-1, kenta.hanada@stu.kobe-u.ac.jp

となる. ここで, $\mu_i^{(s,t)} \in \mathbb{R}$ は共有変数 i における部分問題 s, t 間の一致制約に対するラグランジュ乗数である. また, ベクトルの要素として $\mu_i^{(s,t)}$ がある順序で並んでいるラグランジュ乗数ベクトルを $\boldsymbol{\mu}$ と定義し, $\boldsymbol{\mu}$ のサイズを d とおく.

この問題の最適値 $L(\boldsymbol{\mu})$ は, 任意の $\boldsymbol{\mu}$ の下で原問題に対する下界を与える. 部分節集合毎に分解すると, 部分問題 s は,

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{j \in C_s} w_j (1 - y_j) \\ & - \sum_{i \in V_s} \left(\sum_{u \in S, \exists i \in V_u} \mu_i^{(u,s)} - \sum_{t \in S, \exists i \in V_s} \mu_i^{(s,t)} \right) x_i^s \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i \in L_j^+} x_i^s + \sum_{i \in L_j^-} (1 - x_i^s) \geq y_j, \forall j \in C_s, \end{aligned}$$

となる. この問題の最適値を $L_s(\boldsymbol{\mu})$ とする.

良い下界値は原問題を解く上で重要な情報を与える. 最も良い下界値を得る問題をラグランジュ双対問題と呼び,

$$L(\boldsymbol{\mu}^*) = \max_{\boldsymbol{\mu}} L(\boldsymbol{\mu}) = \max_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{s \in S} L_s(\boldsymbol{\mu}),$$

という d 次元実ベクトル空間上の無制約最大化問題となる.

ラグランジュ分解の特徴は, 元の問題の制約式が分解後の問題にもそのまま現れることである. 重み付き Max-SAT 問題の場合, 分解した後の部分問題は, やはり重み付き Max-SAT 問題となる. 従って, 部分問題は既存の重み付き Max-SAT ソルバーを使って解くことができる. また, 部分問題は原問題に比べて問題のサイズが小さくなっているため, 原問題より高速に解けることが期待できる.

2.3 節集合分割

[黒田 09] では, 共有変数が少ないほど良い質の実行可能解が得られることがわかっている. 従って, 共有変数が少ないほど良い質の下界値も得られることが予想され, どの節をどの部分問題に割り当てるかが重要な問題となる.

できるだけ少ない共有変数で節集合を k 個に分割する問題は, 節を頂点, 論理変数をハイパー辺と見なせばハイパーグラフ k 分割問題と見なすことができる. ハイパーグラフ k 分割問題とは, いくつかのハイパー辺を取り除いて k 個の部分ハイパーグラフに分割するとき, 取り除くハイパー辺の重みを最小化する問題である. この問題を解いた結果取り除かれた論理変数 (ハイパー辺) が共有変数となる. 図 1 に, 節集合を 2 分割する例を示す. 図 1 の例題では, 例えば論理変数 1 のハイパー辺を取り除けば, 2 つの部分ハイパーグラフに分割できることが容易に分かる.

本研究ではハイパーグラフ k 分割問題を解く手法として, ヒューリスティック解法 [Karypis 97] を実装したソフトウェアである hMetis を使用した.

3. ラグランジュ双対問題の解法

ラグランジュ双対問題の目的関数は, 原問題が最小化問題の場合, 凹関数 (最大化問題の場合は凸関数) であることが知られている. ラグランジュ双対問題の解法はこの凹 (凸) 関数性を利用する. 代表的な解法には劣勾配法, 切除平面法, バンドル法 (安定化切除平面法) [Schramm 92] がある.

既存の Multi-MaxSAT ソルバーでは, ラグランジュ双対問題の解法に劣勾配法を用いていた [黒田 09]. 劣勾配法は, 古

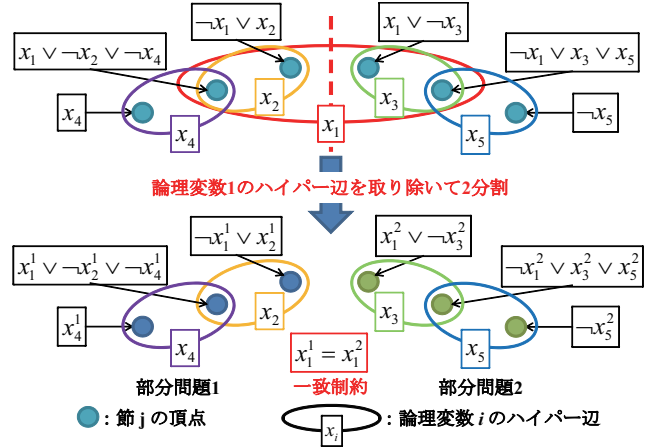


図 1: 節集合 (ハイパーグラフ) 2 分割問題の例

くからラグランジュ双対問題の解法として使われてきたが, 計算コストが低い反面, 下界値が収束したかどうか判定できず, 解が振動するといった問題があることも知られている.

そこで本研究では, 近年ラグランジュ双対問題の解法として用いられているバンドル法を Multi-MaxSAT に適用し, その効果を検証する.

3.1 劣勾配法

ラグランジュ緩和問題における劣勾配は, 緩和した制約式になることが知られている. すなわち, 論理変数 i における部分問題 s, t 間の一致制約に対する劣勾配 $\partial g_i^{(s,t)}$ は,

$$\partial g_i^{(s,t)} = x_i^s - x_i^t,$$

と表すことができる. 劣勾配は $\boldsymbol{\mu}$ の値によって決まるので, ベクトルの要素として $\partial g_i^{(s,t)}$ が $\boldsymbol{\mu}$ の要素と同じ順序で並んでいる劣勾配ベクトルを $\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})$ と定義する.

劣勾配法は, $\boldsymbol{\mu}$ の更新に以下の式を用いる.

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{new}} \leftarrow \boldsymbol{\mu}_{\text{old}} - \frac{\pi(\min\{ub\} - \max\{lb\})}{\|\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}_{\text{old}})\|_2} \partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}_{\text{old}}).$$

ここで, $\min\{ub\}$ は今まで得られた上界値 ub の中で一番低い値, $\max\{lb\}$ は今まで得られた下界値の中で一番高い値, $\pi \in \mathbb{R}^+$ は制御パラメータである. この式は最適値に収束する理論的な保証は無いが, 実際には多くの問題で非常に有効であることが知られている.

3.2 切除平面法

劣勾配法では, 一度計算に用いた $\boldsymbol{\mu}$ の情報は破棄される. そこで, ある時点 $b \in \{0, 1, \dots, B\}$ で用いたラグランジュ乗数ベクトルを $\boldsymbol{\mu}_b \in \mathbb{R}^d$ として, ラグランジュ緩和問題の最適値 $L(\boldsymbol{\mu}_b)$ と劣勾配 $\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}_b)$ を全て記録する. 以降, これらの値をセットにした $\langle \boldsymbol{\mu}_b, L(\boldsymbol{\mu}_b), \partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}_b) \rangle$ のことをバンドルと呼ぶ. 切除平面法はこのバンドルを用いるので, バンドル法の一種とも言える.

切除平面法では, バンドルの持つ特徴を最大限利用する. まず, 劣勾配の定義から, 任意の $\boldsymbol{\mu}_b$ で次の式が成り立つ.

$$L(\boldsymbol{\mu}) \leq L(\boldsymbol{\mu}_b) - \partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}_b)^\top (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_b), \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d. \quad (3)$$

式 (3) の右辺,

$$f(\boldsymbol{\mu}) = L(\boldsymbol{\mu}_b) - \partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\mu}_b)^\top (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_b)$$

に注目すると、 μ_b における $L(\mu)$ の接線であることが容易にわかる。 $f(\mu)$ は $L(\mu)$ の実行不能領域を切除できるから、 $f(\mu)$ を逐次追加して実行不能領域を取り除きながら、ラグランジュ双対問題の最適解 μ^* を求める方法が切除平面法である。

切除平面法では、 μ の更新に以下の線形計画問題を用いる。

$$(CP) \max. \quad r$$

$$\text{s. t.} \quad r \leq L(\mu_b) - \partial g(\mu_b)^\top (\mu - \mu_b), \forall b \in \beta.$$

(CP) の最適値を r_1^* とおく。もし、ある時点 b で $r_1^* = L(\mu_b)$ となれば、 μ_b がラグランジュ双対問題の最適解となる。

切除平面法の短所は、(CP) の許容領域が非有界となる場合があり、非有界とならないように人工的な制約が必要になること、 $L(\mu)$ が不安定で収束が遅いことが挙げられる。

3.3 バンドル法 (安定化切除平面法)

バンドル法 (安定化切除平面法) の基本的なアイデアは、モロー-吉田正則化 (Moreau-Yosida Regularization) を用いた近接点法の一つである。直感的には、切除平面法に 2 次の安定化項を (CP) の目的関数に加えたものと理解できる。

バンドル法では、 μ の更新に以下の 2 次計画問題を解く。

$$(BM) \max. \quad r - \frac{1}{2h} \|\mu - \mu_{cp}\|_2^2$$

$$\text{s. t.} \quad r \leq L(\mu_b) - \partial g(\mu_b)^\top (\mu - \mu_b), \forall b \in \beta.$$

ここで、 $\mu_{cp} \in \mathbb{R}^d$ は中心点 (Center Point)、 $h \in \mathbb{R}^+$ は制御パラメータである。(BM) の最適値を r_2^* とおく。

バンドル法を用いた Multi-MaxSAT のアルゴリズムは、次の通りである。

Step 1: $\mu_0 (= \mu_{cp})$, h を初期化して、 $L(\mu_0)$, $\partial g(\mu_0)$ を求める。 $b = 1$ とする。

Step 2: (BM) を解いて r_2^* , μ_b を求める。

Step 3: μ_b の下で $L(\mu_b)$, $\partial g(\mu_b)$ を求める。

Step 4: $\delta_k = L(\mu_{cp}) - r_2^*$ を求める。もし $\delta_k \leq \delta$ なら、アルゴリズムを終了する。

Step 5: もし $L(\mu_{cp}) - L(\mu_b) \geq \kappa \delta_k$ なら、 $\mu_{cp} = \mu_b$ とする。

Step 6: $b = b + 1$ として、Step 2 へ戻る。

ここで、 $\delta \geq 0$ は終了条件に対する許容誤差である。Step 5 は、 μ_{cp} を更新するかどうかを判定する。 μ_{cp} が更新される場合をシリアスステップ (SS: Serious Step)、更新されない場合をヌルステップ (NS: Null Step) と呼ぶ。

3.4 解法の比較

表 1 に、各解法の特徴を示す。劣勾配法は、ベクトルを更新するだけなので計算量は $O(d)$ である。切除平面法は線形計画問題を解くが、これは多項式時間で解ける。バンドル法は 2 次計画問題を解くので、切除平面法より計算コストがかかる。

一方、反復回数は劣勾配法、切除平面法は収束するまでに非常に多くの反復を要するのに対し、バンドル法はそれらに比べて少ない反復回数で収束することが報告されている。

また、劣勾配法はラグランジュ双対問題が収束したかどうか最適性の保証ができないのに対し、切除平面法とバンドル法は最適性の保証が可能であるのが大きな違いである。

4. 実験

Multi-MaxSAT の性能を評価するため、3 種類の実験を行った。本研究では、重み付き Max-SAT 問題に対する下

表 1: 各解法の特徴

	劣勾配法	切除平面法	バンドル法
計算コスト	低	中	高
反復回数	高	高/中	低
最適性の保証	無	有	有

界値に注目しているの、既存研究との比較は Max-SAT Resolution [Li 09] で行う。全ての実験において、最適値が分かっている問題例に対しては最適値/下界値、最適値が不明な問題例は現在知られている最も良い目的関数値/下界値で定義される下界値の質で評価する。定義から明らかなように、下界値の質は 1.0 に近ければ近いほど良い。

Multi-MaxSAT ソルバーは Java で実装した。部分問題を解く重み付き Max-SAT ソルバーには akmaxsat [Kugel 10] を使用した。また、線形計画問題及び 2 次計画問題を解くソルバーとして CPLEX12.4 を使用した。実験環境は CPU: Intel Core i7-2600@3.4GHz, Memory: 8GB, OS: Ubuntu 11.04, Compiler: Java 1.6.0_27 である。分割数は実験 1, 2 では $k \in \{2, 3, 4, 5, 10\}$ 、実験 3 では $k = 10$ に固定して実験を行った。全ての実験において 5 分でタイムアウトとし、制限時間内に得られた最良の下界値を評価に用いた。

4.1 実験 1: 節集合分割の方法による比較

1 つ目の実験は、節集合分割の方法による下界値への影響を評価する。比較対象はランダムに節集合を分割する方法と、ハイパーグラフ k 分割問題で節集合を分割する方法である。それぞれバンドル法を実装した Multi-MaxSAT ソルバーで 10 回の試行を行い、下界値の質の平均を比較する。使用した問題例は、Max-SAT Evaluation 2012 で使用された重み付き Max-SAT 問題 Random 部門の Max-2SAT 問題 1 問 (100 変数 1200 節) 及び Max-3SAT 問題 1 問 (70 変数 700 節) である。

表 2 と表 3 にそれぞれ Max-2SAT 問題と Max-3SAT 問題の結果を示す。Hypergraph はハイパーグラフ k 分割を、Random はランダム分割をそれぞれ示している。太字になっている数値は、その分割数において一番良い下界値の質が得られていることを示す。また、*がついている数値はその表の中で最も良い下界の質の平均を示す (表 6 を除く)。なお、Max-SAT Resolution も分割数毎に表示しているが、Max-SAT Resolution は分割数に影響されないことに注意されたい。

表 2 と表 3 より、全ての分割数でハイパーグラフ k 分割の方がランダムより同じ k より良い下界値の質が得られていることが分かる。Max-2SAT 問題の場合、分割数が 4 を超えると Max-SAT Resolution よりも下界値の質が悪くなる。これは、部分問題が保持する節数が少なくなることによって部分問題の最適値が低くなるのが原因だと考えられる。

この結果より、以降の実験では全てハイパーグラフ k 分割問題で節集合を分割する方法を採用する。

4.2 実験 2: ラグランジュ双対問題の解法間の比較

2 つ目の実験は、ラグランジュ双対問題の解法による比較を行う。比較対象は劣勾配法、切除平面法、バンドル法及び Max-SAT Resolution である。実験の環境を統一するため、各問題例における節集合分割の構造 (部分問題) は同一とした。各手法において 1 回の試行を行い、下界値の質の平均を比較する。問題例は Max-SAT Evaluation 2012 で使用された重み付き Max-SAT 問題 Random 部門の問題例全 141 問を使用した。なお、問題例の内訳は Max-2SAT 問題が 121 問、Max-3SAT

表 2: 実験 1: 重み付き Max-2SAT の結果

分割数	Hypergraph	Random	Resolution
2	0.9419*	0.8948	0.8069
3	0.9049	0.7704	0.8069
4	0.7686	0.6647	0.8069
5	0.8052	0.7036	0.8069
10	0.7012	0.1966	0.8069

表 3: 実験 1: 重み付き Max-3SAT の結果

分割数	Hypergraph	Random	Resolution
2	0.4381*	0.3447	0.0000
3	0.1917	0.0268	0.0000
4	0.0195	0.0000	0.0000
5	0.0452	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000

表 4: 実験 2: 重み付き Max-2SAT の結果

分割数	Bundle	Cutting	Sub-G	Resolution
2	0.9335	0.8053	0.9337*	0.7994
3	0.8994	0.6897	0.8956	0.7994
4	0.7705	0.4444	0.7638	0.7994
5	0.8138	0.4922	0.8064	0.7994
10	0.7070	0.3173	0.6984	0.7994

表 5: 実験 2: 重み付き Max-3SAT の結果

分割数	Bundle	Cutting	Sub-G	Resolution
2	0.6054*	0.3700	0.5949	0.0000
3	0.3420	0.1098	0.3113	0.0000
4	0.0902	0.0026	0.0334	0.0000
5	0.1105	0.0146	0.0364	0.0000
10	0.0068	0.0000	0.0000	0.0000

表 6: 実験 3 の結果

割合	Bundle	Cutting	Sub-G	Resolution
0.1	0.9629	0.8384	0.9539	0.0004
0.2	0.8561	0.6991	0.8355	0.0017
0.3	0.7444	0.5798	0.7163	0.0045

問題が 40 問である。

表 4 と表 5 にそれぞれ Max-2SAT 問題と Max-3SAT 問題の結果を示す。Bundle がバンドル法を、Cutting が切除平面法を、Sub-G が劣勾配法を、Resolution が Max-SAT Resolution をそれぞれ示している。

Max-2SAT 問題の問題例では、分割数 2 を除いてバンドル法の下界値の質の平均が劣勾配法のそれを上回ったが、差は僅かである。Max-3SAT 問題の問題例では全ての分割数においてバンドル法が、劣勾配法、切除平面法及び Resolution を上回った。また、分割数が小さいほど差が小さくなる傾向は両方のカテゴリで同じであった。

4.3 実験 3: 共有変数の割合による比較

[黒田 09] の方法に倣い、共有変数の割合に関する性能の比較を行う。共有変数の割合とは、各部分問題に含まれる論理変数の数に対する共有変数の割合である。今回、部分問題の数(分割数)を 10 で固定し、全ての共有変数は全ての部分問題が保持するようにした上で、以下のような問題例を新たに作成した。

- 各部分問題に含まれる論理変数の数: 50
- 各部分問題に含まれる節の数: 500
- 各部分問題の性質: 重み付き Max-3SAT (Random)
- 共有変数の割合: {0.1, 0.2, 0.3}

問題例全体としては、455 変数 5000 節, 410 変数 5000 節, 365 変数 5000 節というサイズの問題例である。各共有変数の割合につき 10 問, 合計で 30 問を作成した。

表 6 に結果を示す。割合は共有変数の割合を示している。

表 6 より、全ての共有変数の割合においてバンドル法の下界値の質の平均が劣勾配法、切除平面法及び Resolution のそれを上回ることがわかった。また、共有変数の割合が小さくなるほど得られる下界値の質が良くなることもわかった。

特筆すべきなのは、構造を持たない Random な重み付き Max-3SAT 問題ではそれほど良い下界値の質が得られなかったのに対し、構造を持った問題例では非常に良い下界値の質が得られたことである。

5. まとめと今後の課題

Multi-MaxSAT にバンドル法を適用して、その効果を実験的に評価した。その結果、問題の種類や構造及び節集合の分割数に依存するものの、下界値を得る既存手法である Max-SAT Resolution よりも良い下界値を得られることがわかった。バンドル法は劣勾配法よりも若干良い下界値の質を得ることができ、ラグランジュ双対問題が収束したかどうか判定可能なので有用である。ただし、Max-SAT Resolution の計算コストは非常に小さい一方、Multi-MaxSAT の計算コストは非常に大きいことに留意しなければならない。

Multi-MaxSAT は重み付き部分 Max-SAT 問題に自然に拡張できる。今後の課題は、重み付き部分 Max-SAT 問題の問題例やアプリケーションの問題例で実験を行うこと、Multi-MaxSAT を組み込んだ厳密解法の提案等が挙げられる。

また、本研究で用いたバンドル法は初歩的なものに過ぎない。他にも様々なバンドル法が提案されているので、今後それらを Multi-MaxSAT に適用して評価したい。

参考文献

- [Karypis 97] Karypis, G., Aggarwal, R., Kumar, V., and Shekhar, S.: Multilevel hypergraph partitioning: applications in VLSI domain, in *DAC '97*, pp. 526–529 (1997)
- [Kugel 10] Kugel, A.: Improved Exact Solver for the Weighted Max-SAT Problem, in *PoS '10*, pp. 15–27 (2010)
- [黒田 09] 黒田 陽之, 平山 勝敏: Multi-MaxSAT: ラグランジュ分解・調整法を用いた Weighted Max-SAT 問題の解法, 電子情報通信学会論文誌 D, Vol. 92, No. 1, pp. 51–60 (2009)
- [Li 09] Li, C., Manyá, F., Mohamedou, N., and Planes, J.: Exploiting Cycle Structures in Max-SAT, in *SAT '09*, pp. 467–480 (2009)
- [Schramm 92] Schramm, H. and Zowe, J.: A Version of the Bundle Idea for Minimizing a Nonsmooth Function: Conceptual Idea, Convergence Analysis, Numerical Results, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 2, No. 1, pp. 121–152 (1992)