

算数文章題における統合過程のモデル化と外化支援システムの実践利用

Modeling of the Integration Process of Mathematical Word Problems and Experimental Use of the Learning Environment for Supporting Externalization

山元 翔^{*1} 尾土井 健太郎^{*1} 前田 一誠^{*2} 林 雄介^{*1} 平嶋 宗^{*1}
 Sho yamamoto Kentarou odoi Kazushige maeda Yusuke hayashi Tsukasa hirashima

^{*1} 広島大学大学院工学研究科 ^{*2} 広島大学附属小学校
 Graduate school of Engineering, Hiroshima University Elementary School Attached to Hiroshima University

In standard model of solving process of arithmetic word problems the process consists of four processes that are transformation, integration, plan and execution. Several investigations have been reported that that most important process is integration process among them. In this research, we have furthermore divided the integration process into two sub processes that are linguistic-relation integration and numerical-relation integration. We have developed a learning environment for supporting externalization process of the numerical-relation integration. The environment has been practically used in two classes of an elementary school. The results of the practical use have been reported. As one of the important results of the practice, we have found that the numerical-relation integration can be categorized into a story-base form, a calculation-base form and a product-sum normal form.

1. はじめに

本研究で対象とする算数文章題の問題解決においては、一般的に、問題解決過程はまず二つの過程に分けられている。問題を理解する理解過程と、理解した問題に解法を適用し解決する解決過程の二つである。更に理解過程は変換過程と統合過程、解決過程はプラン化過程と実行過程という下位課程に分けられる[Hegarty 92, 田鹿 95, 佐藤 05, Riley 83]。変換過程では問題文を構成する一文ごとの意味を理解し、統合過程では問題中に与えられている事柄を統合して一つの意味のある問題表象を構成する。また、プラン化過程では統合過程で得られた問題表象から正解を得るための計算の方法を導き、解決過程では計算を実行して答えを得る。算数の文章題においては、この4つの過程のうちの統合過程が最も重要であり、また困難な過程であるとされている。したがって、算数の文章題を対象とした問題解決支援においては重要な対象となるはずであるが、統合過程自体は頭の中で行われるプロセスであるため、それを支援の対象とすることは簡単ではなかった。本研究では、この統合過程のより直接的な支援の実現を目指して、統合過程のモデル化とそのモデルにといった外化表現と、その外化表現の、(1)可視化、(2)操作可能化、(3)評価可能化、を試みている。

2. 統合過程のモデル化

2.1 統合過程モデルの問題点

これまでの算数文章題の研究においては、文章中に現れる種々の概念を関係付け、一つのまとまった表現を作り上げることが統合過程としており、その表現は言語、あるいは概念的なものであった[Riley 83, Kintsch 85]。これらは一回の加減算で解ける簡単な問題を対象としたもので、平嶋らは鶴亀算などの複雑な計算手順を必要とする場合の統合過程を表すモデルMIPSを提案している[平嶋 92]。図1にMIPSによる問題表象の表現の一例を示す。このモデル化により、問題は言語的な概念とその関係により外化されている。この表象を鶴亀算の解法

が持つ解法インデックス(解法の適用条件)と一致させることで、一連の解決手順が適用可能となっている。

しかしながら、言語的に問題表象を形成したということは、問題を言語的には理解しているといえるものの、問題を算数的に、すなわち数量関係的に捉えた表象を形成できていないといいたいがたい。算数の文章問題解決においては、問題を言語的に統合することも必要不可欠と言えるが、数量関係的にも捉えることができなければ、解を導出し、問題を解くことができないはずである。MIPSではこの表象が作られれば解法を検索することができ、問題を解決することが可能となるが、検索した解法を適用するためには問題の言語的統合関係に対応した数量的統合関係を理解しておく必要があり、問題を算数的に理解するためにもこの関係を把握しなければ、問題を理解しているとはいえない。つまり、統合過程とは単に言語的に問題を解釈し、統合するだけではなく、数量関係的にも統合を行う必要があるといえる。以下本稿では、統合過程を構成する二つの過程をそれぞれ「言語的統合過程」と「数量関係的統合過程」と呼ぶことにする。

なお、本節では鶴亀算を例題として取り上げたが、鶴亀算の問題の場合、一般性のある二項演算だけでは算数として解決可能な数量関係的統合が行えず、これを行うには、「鶴と亀の総匹数」と「鶴の足の本数」から「すべて鶴と仮定した場合の足の総本数」といった特殊な意味を持った数量を導く必要がある。本研究では現時点ではこのような特殊な演算を必要とする問題の取り扱いは今後の課題とし、一般性のある二項演算のみから成り立つ文章題のみを対象とする。

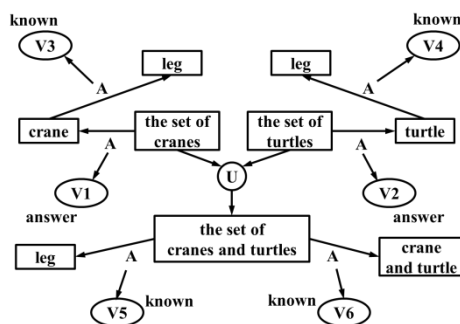


図1 MIPSの例

連絡先: 山元翔, 広島大学大学院工学研究科学習工学研究室, sho@el.hiroshima-u.ac.jp

2.2 本研究における統合過程のモデル

ここでは数量関係の統合の外化表現として、算数三角ブロックを提案する。数量関係の統合の段階では、概念同士を演算関係で関係づけることが必要となる。この表現として、本研究では単一の二項演算を最小の基本単位として、図 2 に示すような三つ組み構造を提案している(以下、この構造を"算数三角ブロック"あるいは単に"三角ブロック"と呼ぶ)。単一の三角ブロックは、和差乗除のいずれかの演算子により、任意の三つの概念における演算関係を表現している。また三角ブロック同士は一致する概念を介して接続することができ、階層的に数量関係を表現することができる(図 3)。

加えて三角ブロックは言葉の式表現に対応しており、図 2 における要素 A, 要素 B, 結果という三つの概念は、

$$[要素A][演算子][要素B] = [結果]$$

という表現に変換することができる。

これは図 3 に示す階層構造表現であれば、

$$[要素A][演算子1][要素B] = [結果A]$$

$$[結果A][演算子2][要素C] = [結果B]$$

という表現となる。

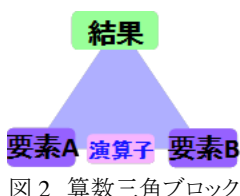


図 2 算数三角ブロック

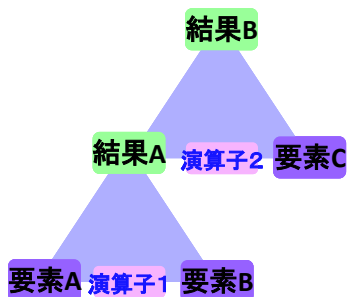


図 3 算数三角ブロックの階層構造表現

3. 数量関係の統合の学習支援システム

ここでは、先に述べた算数三角ブロックを用いた数量関係の統合の活動を支援する「さんすうさんかくブロックシステム」(以下、SSBS と記述)について述べる。SSBS は Android で開発しており、タブレット PC で運用可能となっている。3.1 節でシステムの概要、3.2 節ではシステムの誤り診断機能について述べる。

3.1 システムにおける演習の流れ

SSBS による問題演習の活動は、(i)用意されている要素を三角ブロックとして組み立てる数量関係の統合構築構築ステップと、(ii)作成した構造から実際に求答を行う計算実行ステップからなる。数量関係の統合構築は、問題において解決に必要な数量関係を表しているものの、これをどのような演算および順序で計算していけば答えを求めることができるかはまだ決定されていない状態である。たとえば、三角ブロックの演算子が「和」として表現されていたとしても、求答の際には「差」として計算を行う場合がある。したがって、この構造上で、求答プランを作成し、それを実行することが必要となる。したがって、(ii)はプラン化過程と実行過程に相当することとなる。

(i)数量関係の統合構築構築ステップにおいて、学習者は与えられている問題中の概念の、数量関係的な統合を行う。要素は具体的に次の三つが与えられる。A.問題文中に明示的に記述されており、数値も与えられている概念(既知の概念)、B.問題文中に明示的に記述されていないが、三角ブロックによる構造化に必要な中間概念(未知の概念)、C.問題の答えとなる、数値を求めるべき概念(問題の答えとなる概念)である。学習者は加減乗除の演算子をもつそれぞれの三角ブロックを適宜選択し、これらの概念を当てはめていくことで、統合構築を構築する。この操作はタップ操作によるボタン選択と、ドラッグドロップ操作による各概念および三角ブロックの選択/移動の二種類である。このステップのシステムインタフェースを図 4 に示す。

(ii)計算実行ステップでは、学習者は(i)で構築した統合構築を形成する各概念に数値を代入することで、実際に問題の答えを求める。ただし A.既知の概念については、このステップの開始時点でシステムが自動的に数値を代入する。そのため学習者は、B.中間概念と C.答えとなる概念に対して、数値代入を行う。この操作は、タップ操作による概念の選択及び数値入力によって行う。

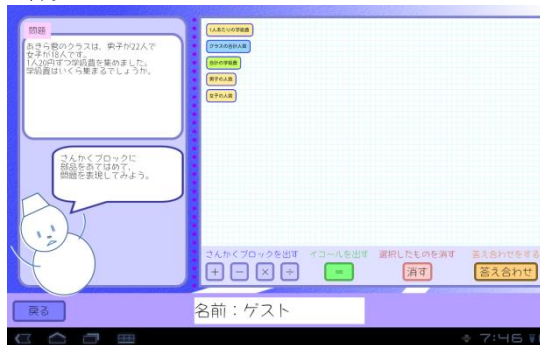


図 4 数量関係の統合構築構築ステップのインタフェース

3.2 誤り診断とフィードバック

本システムは教授者が予め用意しておく正解の統合構築と、学習者が演習中で構築した統合構築間の差分を抽出することが可能であり、それに基づいた誤りの診断やフィードバックを行うことができる。ここでは(i)(ii)それぞれのステップにおける誤りとそのフィードバック内容について述べる。(i)統合構築構築ステップにおける誤りは、概念が三つ当てはめられていない三角ブロックが存在する誤り、構造の作成に用いられていない概念が存在する誤り、ある三角ブロックに当てはめられた三つの概念の組み合わせが正解と異なっている誤り、三つ組の組み合わせは正しいが三角ブロックの演算子が正解と異なっている誤り、の四種類である。また、(ii)計算実行ステップにおける誤りは、すべての概念に数値が代入されていない誤り、代入された数値が正解と異なっている誤り、の二種類である。

それぞれの誤りに対するフィードバックは、コメントの表示と、誤っている概念や三角ブロックを色付けすることによる強調表示である。

4. 実践利用

4.1 実験内容

被験者は広島大学附属小学校の6年生2クラス(以後、A クラス、B クラスと表記する)である。実践の流れとしては、プレテストを1時限、システムを用いた演習を2日で2時限、その後ポストテストとアンケートを1時限(45 分)行った。実際に演習を行った時間は 80 分程度で、システムで用いる問題は表 1 のように系列

化を行なっている。レベル 1,2 では三角ブロックを縦につなげて一つの大きな構造を作る問題、レベル 3,4 はそのような構造を二つ作った上で、それらをイコールでつなぐことが求められる、より発展的な問題となっている。

プレ・ポストテストはそれぞれ 10 分、アンケートも同様に 10 分をかけて実施した。プレテストはシステムで用意している問題系列のレベルに対応した問題を各レベルに付き一問ずつ、合計四問提示した。問題の難易度は授業の演習で行われる程度であり、現場教員の用意したものである。ポストテストはこの問題の数値やオブジェクトを変更しただけである。アンケートでは主にシステムを用いた演習についての感想を質問している。

実践利用では、(i)数量関係の統合過程が存在すること、(ii)この過程が数量を表す概念間の二項演算(三つの数量概念の数量関係)の連結として表現できる、ということ、(I)提案した数量関係の統合が学習者に妥当なものとして受け入れられるか、として検証を行った。(i)(ii)の仮定が正しくなければ、数量関係の統合の外化活動は学習者にとって困難となるはずであるためである。また、(II)問題を作成することで得られる数量関係の統合の構造形式の検証も行った。検証については実践利用のログ及びアンケート結果の分析により行う。また、プレ・ポストテストの結果を比較することで、学習効果についても確認を行った。

表 1 演習用の問題系列

レベル	問題数	必要な三角ブロック数
レベル 1	2	2
レベル 2	2	4
レベル 3	2	2
レベル 4	3	3, 4 (問題 4-3 のみ)

4.2 実験結果 – 提案した構造の検証

まず(I)について、システム演習の達成状況と、システム演習についてのアンケートの回答状況から評価した。表 2 にシステムによる演習の平均到達問題数と、全問正解した人数を示す。全問題数 9 問中、6 あるいは 7.5 問正解できており、最終的に全問達成した人数も 39 人となっていることから、十分に構造の作成し、演習を行っていたと考えられる。またアンケートでは、システムの演習を『部品を3つ選んで、さんかくブロックに当てはめる』『さんかくブロックをつなげて、「問題を表現する構造」を作る』『作った構造の中の、計算できる部分から順番に計算して、答えを求めると』という三つの手順として説明した上で、それぞれの手順について図 5 に示すアンケートを行った。どの設問も 7 割以上の児童らが肯定的な回答を示していることから、システムの演習により、児童の考えているものを外化することができていると考えることができる。以上の結果より、児童らはシステムを用いた数量関係の統合の外化活動を活発に行うことができている、その活動を問題解決に貢献するものであるとも捉えていた。加えて、この活動に違和感を持っていないことも確認できたといえる。そのため、児童らは数量関係の統合を妥当なものとして受け入れていたことがうかがえた。なお、アンケートに答えた全員が少なくとも1時限はシステム演習を体験している。

表 2 演習の平均到達問題数と全問正解した人数

	被験児童数 (全問達成した人数)	平均達成問題数
一日目	74 (9)	6.0
二日目	66 (39)	7.5

1-1 『部品を3つ選んで、さんかくブロックに当てはめる』ことは、問題の意味を知るのに役に立った。(72)
1-2 『部品を3つ選んで、さんかくブロックに当てはめる』ことは、これまでの算数の文章問題を解くときにも、やっていることだと思う。(71)
2-1 『さんかくブロックをつなげて、「問題を表現する構造」を作る』ことは、問題の意味を知るのに役に立った。(72)
2-2 『さんかくブロックをつなげて、「問題を表現する構造」を作る』ことは、これまでの算数の文章問題を解くときにも、やっていることだと思う。(72)
3-1 『作った構造の中の、順番に計算できる部品から順番に計算して、答えを求めると』ことは、問題の意味を知るのに役に立った。(72)
3-2 『作った構造の中の、順番に計算できる部品から順番に計算して、答えを求めると』ことは、これまでの算数の文章問題を解くときにも、やっていることだと思う。(72)

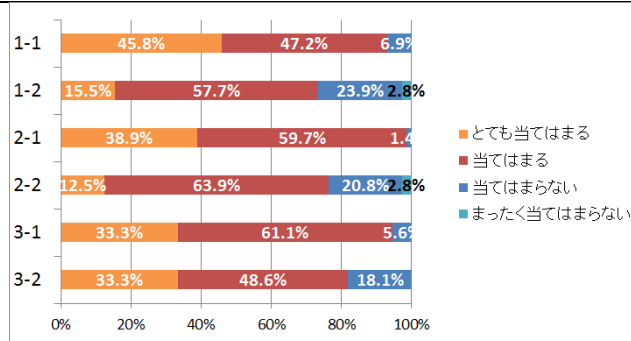


図 5 アンケート項目と結果(括弧内は回答者数)

4.3 実験結果 – 構造形式の検証

次に(II)について、演習のログから、児童らの外化の結果として現れた構造を分析する。主に現れた構造としては、(a) 頂点を始点として、問題文の文章の流れに沿って三角ブロックの階層構造表現を行う構造形式、(b) 実際の答えとなる概念が構造中の頂点となるような構造形式、(c) ×と+の演算子を持つ三角ブロックのみで構成される構造形式、の三つである。これらを本研究では、(A)物語形、(B)求答形、(C)積和標準形と呼ぶ。(A)については問題の流れ通りに構造を作成するため、もっとも基本的な構造形式といえ、(B)はより計算式に近い構造形式であるため、出現したと考えられる。(C)については、算数教育においては問題を「積和標準形に直して考える」ということがしばしば行われており、本システムを利用した教諭もそれを一つの方法として教授しているので、この形式が現れたと考えられる。以降はこの三つの形式に基づき、説明していく。

分析結果として、各レベルで現れた構造形式とその推移を図 6 に示す。結果として物語形・求答形・積和標準形が全体の 8 割以上を占めていた。また、レベル 1, 2 では求答形、レベル 3, 4 では物語形が最も多く作られていた。このことについては、簡単なレベルの問題であれば発展的な構造形式である求答形を作ることができるが、より難しいレベルの問題では基本的な構造形式である物語形しか作ることができなかつた、という児童が多かったのではないかと考えられる。実際に構造の記述に変化が生じた児童について調査したところ、9 割以上が上述の変化に当てはまっており、物語形が基本的な構造記述であるという予測も正しかったといえる。

次に、三つの構造形式の作成の仕方をパターン別に分類し、それぞれのパターンの特徴を分析した。なお、分類の対象としたのはレベル4まで到達した児童が演習で作成した構造である。

この結果を表 3 に示す。特殊は様々な構造をバラバラに作成した群となる。まず各パターン的人数だが、演習中に構造形式の変化した児童が全体の 4 割ほどおり、変化のタイミングはレベル 3 に取り掛かった時がほとんどであった。このことは、問題が難しくなるタイミングで作成する構造が変化したといえる。また変化の種類についてもほぼ求答形から物語形だけであったことから、物語形が基本であり、求答形が発展的な形式なのではないかという仮定が生まれた。つまり問題が簡単であれば求答形で作成することが可能だが、困難な課題に対しては物語形でしか作れなくなったのではないかと考えられる。

次にパターンごとに算数の成績の平均値を抽出したところ、特殊と積和標準形一貫が最も成績が良かった。このことから、算数の文章問題についてよくわかっている児童は、問題に応じて作成する形式を様々に変えることができたり、積和標準形を作ることができたりしたのではないかと考えられる。この結果については今後演習の評価指標として利用できるのではないかと考えている。

また求答形一貫よりも、求答形から物語形へ変化した群のほうが、成績が良かったことについて着目した。これについて t 検定を行ったところ有意傾向にあった ($p=0.06$)。統合構造としては求答形の方はプラン化を終わったより問題解決が進んだ形といえるが、同時にその作成は難易度が高いといえる。したがって、問題自体の難易度が上がると、その作成の難易度も上がるという。ここで、問題の難易度が上がった際に、より簡単な構造の作成切り替えて学習者群の方が、切り替えなかった群よりも成績が高かったことは、難しさを判断して切り替えるという振る舞いが問題解決において重要であることを示唆しており、また、求答形を作成し続けた学習者の中には、切り替えることができなかったために難易度の高い作業を継続した学習者が含まれている可能性を示唆している。実際にそれぞれのレベルでの平均誤答数を確認すると、表 4 のようになっていた。これについて検定を行ったところ、レベル 1, 2 では有意差はなく ($p=0.92$)、レベル 3, 4 で有意差がある ($p=0.03$) という結果だった。

以上より、本研究で提案した三角ブロックの階層構造表現による問題の表現形式は児童に違和感なく受け入れられ、また児童の問題解決における統合の捉え方として、物語形、求答形、積和標準形を確認することができた。よって本研究で提案したモデルがある程度の妥当性を持っていることが確認できたと考えている。

表 3 構造形式の作成パターンの分析

パターン	人数	算数成績
物語形一貫	14	78.7
求答形一貫	16	68.1
積和標準形一貫	5	83.2
変化発生 (レベル 3 での変化 が 24 人)	26	78.1
- 求答→物語	24	78.5
- 求答→積和	1	83.0
- 積和→物語	1	69.3
特殊	5	83.7

表 4 求答形一貫と求答形→物語における誤り数

パターン	レベル 1, 2	レベル 3, 4
求答形一貫	0.96	1.32
求答→物語	0.93	0.68

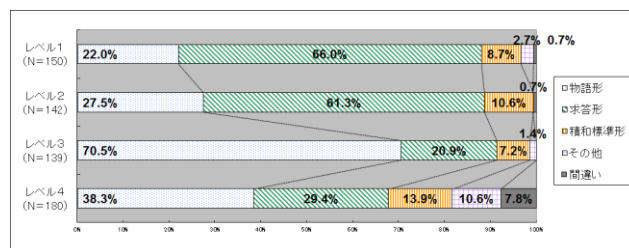


図 6 レベルごとに作成された問題形式とその推移

4.4 実験結果 – 学習効果の検証

学習効果の評価として、プレ・ポストテストについて、テストと二回のシステム演習に参加した 61 名の児童について調査した。その結果、4 点満点のプレテストの平均正解数 $M=3.4$ で $SD=0.54$ 、ポストテストでは $M=3.3$ で $SD=0.72$ であり、有意差は見られなかった。しかしプレ・ポストテストともに満点が 32 名いたことから、テスト結果に天井効果があったといえる。また演習結果も 80 分という短時間であったことから、文章問題の解決能力をみるテストでの向上が見られなかったと考える。しかし今後中長期的な期間でシステムの利用を行うといったような検証が必要であるといえる。また、システムがうまく扱えなかったと見受けられる児童らに関してはプレ・ポストで成績が下がっていたため、その原因を突き止めると共に、フィードバックの改良も必要であるといえる。

5. まとめと今後の課題

本研究では、算数文章題の問題解決過程における統合過程の活動の支援を目的とし、統合過程を概念的統合と数量関係的統合の二段階であると捉えた上での数量関係的統合における外化表現の提案、及びそれに基づいたシステムによる学習環境の開発・実践利用を行った。実践利用では、システムに実装した数量関係的統合のモデルを前提として、学習者の問題に対する統合の結果をいくつかの構造形式として確認することができた。今後はこれら三つの構造形式の傾向に重点を置いた分析を行いたいと考えている。

参考文献

- [Hegarty 92] M Hegarty, RE Mayer, CE Green : Comprehension of arithmetic word problems: Evidence from students' eye fixations, Journal of Educational Psychology, Vol.84, No.1, 76-84, 1992.
- [田鹿 95] 多鹿秀継:算数問題解決過程の分析, 愛知教育大学研究報告, 44, pp157-167, 1995.
- [佐藤 05] 佐藤, 阿久津, 菅原:小学生における計算能力と文章題解決能力の関係, 岩手大学教育学部教育実践総合センター研究紀要, 第4号, 85-89, 2005.
- [栗山 09] 栗山和広, 小学校2年生の算数文章題における意味構造の影響, 愛知教育大学研究報告, 58 (教育科学編), pp.67-72, 2009.
- [Riley 83] Riley M.S., Greeno J.G., Heller J.I.: Development of Children's Problem-Solving Ability in Arithmetic. , Academic Press, 153-196, 1983.
- [Kintsch 85] Kintsch W., Greeno J.G.: Understanding and Solving Word Arithmetic Problems, Psychological Review, Vol.92, No.1, pp.109-129, 1985.
- [平嶋 92] 平嶋宗, 中村祐一, 池田満, 溝口理一郎, 豊田順一: ITS を指向した問題解決モデル MIPS, 人工知能学会誌, Vol.7, No.3, pp.93-104, 1992.