3D3-3

物語構造と数量関係の対応づけによる文章題の構成の理解と作問支援

Understanding of Arithmetic Word Problems based on Roles in Stories and Quantitative Relations for Problem Posing Learning Support

林 雄介 Yusuke HAYASHI
山元 翔 Sho YAMAMOTO
平嶋 宗 Tsukasa HIRASHIMA

広島大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Hiroshima University

This study aims to analyze the information structure of arithmetic word problems for problem posing support. Arithmetic word problem has two types of structure; one is “narrative structure” and the other is “quantitative structure”. Understanding both of types of structures and relation between them is important to solve and pose arithmetic problems. Especially, it is considered that posing problems afford better understanding of them because posing problems requires the understanding more than solving problems. This paper discuss the relation between “narrative structure” and “quantitative structure” of quantities in arithmetic word problems based on roles of them in both structure.

1. はじめに

知識を獲得し，使いこなせるようにするための演習として，問題解決だけではなく，問題を作らせる（作問）ことの有用性が指摘されている[Polya 1957, Silver 1996]. しかし，作問は一般的に学習者による自由度が高く，答えを一意に決定できるものではないので通常の一斉授業で実施することは難しかった.

このような問題に対して，平嶋らは小学校における算数文章題と対象として，「モンサクン」というシステムを開発，運用して，一斉授業における作問学習の実施可能性を示すと共に，その学習効果を示している [倉山 2012].「モンサクン」では作問を自由記述では無く，単文統合型とよばれる形式で行っている. この単文統合型というのは学習者は作るべき問題の仕様とそれを構成するために必要な単文を不必要なものと合わせて提供して作問させる形態の作問演習である. この仕組みによって，従来では学習者の自由な発想で作られ，採点や比較が難しかった作問演習を Agent-assessment [平嶋 2009]によって実現している.

また，モンサクンの開発においては，学習者が作問時に行うタスクを定式化して，単文統合としての作問タスクのモデル[倉山 2012]を提案している. これは算数文章題を作成するに当たって，数式と物語構造の対応をどう決定していくかのサブタスクのプロセスを記述しており，学習者が間違えたときにどのタスクで行き詰まっているかを解釈することができる.

本研究では，その知見をベースに作問学習を成立させるための基盤として，作問学習で学ぶことが期待される算数文章題の構造を情報工学的に分析・モデル化することを目指す. 分析の対象とする算数文章題の範囲としては，「モンサクン」でも扱っている小学校における算数文章題，特に加減算から始める. そして，その範囲を拡張していくことで，四則演算すべて，より複雑な算数文章題，そして，それ以外の問題へと発展させていく. 本稿の主張はその第一歩として，学習対象のモデル化の重要性を主張し， 算数文章題が実際にどのように分析できるかを示す.

連絡先：林 雄介，広島大学大学院工学研究科，広島県東広島市鏡山 1-4-1，082-42407671，hayashi@lel.hiroshima-u.ac.jp

2. 物語構造と数量関係の対応づけ

小学生が算数の教科において学ぶ算数文章題は数量関係をベースにした物語から四則演算による数式を読み取り，計算するということが求められる問題である. この算数文章題の特徴は，単に数式を解くのではなく，数量関係をベースにした物語から数式を読み取った上で計算することが求められることにある. Mayer [Mayer 81, 82]によると，文章題の解決過程は(I)変換,(II)統合,(III)計画,(IV)実行の 4 つのプロセスに区分でき，物語からの数式の導出は変換と統合のプロセスに対応する. ここでは，変換と統合のプロセスにおいて認識されるものを四則数量関係算数文章題というものの構成要素として分析して整理する.

また，本研究では，問題とは以下のように定義している [平嶋 2005].

問題＝前提情報（既知）＋結論情報（未知）

つまり，本稿で扱う「問題」とは，既知の情報から未知の情報を導出することを求める課題とする. よって，問題には未知数が含まれる必要があり，問題を作るということはいずれかの情報を未知とするともいえる. 本研究で対象とする算数文章題，特に加減算を扱うものでは，数式によって関係づけられる3つの数量の中の一つを未知数として，残りの2つの数量とその和か差の関係を提供するものといえる. このような考えの下で，本節ではまず，未知数を含まない算数物語として分析を行い，その上で一つの数量を未知数とすることでどのように問題が形成されるかを考察する. このとき，本研究で注目するのが，算数文章題の中で各数量が持つ役割である. これを数量関係における役割と物語における役割の二つの観点で整理することによって，四則演算による算数文章題（以下，特に区別する必要が無い場合には，単に算数文章題とする）

以下では，四則演算を対象とした算数文章題のうち加減算をあつかうものを対象として，問題の構造を問題文に出てくる数量に対する数量関係における役割と物語における役割の二つの観点から分析する.

2.1 数量関係における役割

数量関係における役割とは，ここでは和による数量の全体−部分関係における役割とする（以降は「数量関係役割」とする）. 対象としているのは，二項の加減算であり，数量の一つは他の2

つの数量の和に等しい数量となっている. ここでは, その和にあたる数量が和の役割を持っている, 残りの2つの数量は和を構成する要素の役割を持っていると定義する. そして, 和の役割を持つ数量を「和の量」, 和を構成する要素の役割を持つ数量を「要素量」とよぶ. 例えば, [3, 5, 8]という 3 つの数量が有る場合, 8が和の量であり, 3と5が要素量となる. さらに, この段階では, 2つの要素量については役割の違いはなく, 同じ意味を持つとする.

2.2 物語における役割

加減算に関する算数物語は数量関係を加算もしくは減算として表現できる. そして, そこに現れる3つの数量は 2.1 で述べた和としての数量関係を持つことができ, それぞれが和の量か要素量になり得る. 以下では, 物語は和の量や要素量が, さらに物語の中での役割を持っていると考え, 物語の種類の分類の拡張した上で, それぞれの種類において登場する役割を定義する.

加減算で表される物語の種類は「合併」, 「変化」, 「比較」の3種類に分類できるといわれている[Riley 1983]. さらに, 変化と比較は分類することができ, 物語の種類は5種類ある. 変化に関しては, 同じ種類のものの量が増える「増加」と減る「減少」の2種類に区別する. 比較に関しては, 基準とする数量に対して対象の数量が多い「過剰」と少ない「不足」に区別する. よって, 本稿では, 「合併」「増加」「減少」「過剰」「不足」の 5 種類となる. ここでは, これらは基本的に同種のものの数量変化を扱うものか, 差分といった抽象的な数量を扱うかによって区分しているが, ここではその説明は割愛させていただく.

上記の5つの物語の種類のそれぞれにおいて, 和の量や要素量が持つ役割を例を示しながら考察する. 例えば, 合併の物語の具体例は

1. りんごが3こあります
2. みかんが5こあります
3. りんごとみかんがあわせて8こあります

といったものである. この物語の中では「全体量」と「部分量」という二つの物語における役割が現れると考えられる. 全体量は合わせた後の合計の数量を表し, 他の二つの量の和となる. またの残り 2 つの数量はその全体を構成する部分となるので, 部分量とよぶことにする. ただし, ここで 2 つの部分量は役割として区別されない. このような物語によって与えられる役割を「物語役割」とよぶことにする.

しかし, 一つの物語の種類において物語役割が 2 つしか無いのは特殊形であり, 他の物語の種類では物語役割は3つとなる. 例えば, 変化の物語のうち, 増加の物語であれば, 初期の数量（初期量）に対して増加した数量（増加量）があり, その結果としての数量（結果量）がある. そして, これらは初期量＋増加量＝結果量の関係を持つ.

一方, 減少の物語であれば, 初期量−減少量＝結果量という関係であるが, 和の関係では結果量＋減少量＝初期量である このように, 物語の種類が変わると, 物語における役割の名称が同じで内容的にも同じ役割を持っていても, 数量関係としては異なるものもある. これが次節で述べる数量関係における役割と物語における役割の関係に関わる.

2.3 数量関係役割と物語役割の関係

前節までで述べたように, 算数物語で現れるそれぞれの数が, 数量関係と物語のそれぞれの観点から役割を持つ. そして, 一方の観点のある役割がもう一方の観点の役割の内のどれに対応するかは物語の種類によって決定できる. その対応を表 1 に示す.

表 1　数量関係役割と物語役割の関係

			数量関係役割		
			要素量	要素量	和の量
物語の種類	合併		部分量	部分量	全体量
	変化	増加	初期量	増加量	結果量
		減少	結果量	減少量	初期量
	比較	過剰	基準量	差分量	対象量
		不足	対象量	差分量	基準量

これらの物語役割は数量関係役割によって, 数式でその関係を表すことができる. しかし, 表される式をそれぞれの物語種類で複数考えることができる.

例えば, 減少の物語では, 物語の流れからは「初期量−減少量＝結果量」であるが, 数量関係役割からは「結果量＋減少量＝初期量」ともいえる. これに対して, 物語を扱う際の本研究での基準を作るために, 物語を記述するときに対象物の名称などが出てきたときにその数量を表す記述が必ずあるようにしたものを「基本物語」と定義する. 例えば, 過剰の物語で以下のようなものは, 2文目でみかんの個数についての直接的な言及がないので, 基本物語ではないとする.

1. りんごが5こあります
2. みかんはりんごよりを2こおおい
3. みかんは7こあります

このように, 物語の基本形とその中での物語役割, 数量関係役割との対応を整理することで, 算数文章題の基盤を明確にすることが本研究の目標の一つである.

3. 算数物語と算数文章題の関係

前述したように, 本研究では問題を

問題　＝　前提情報（既知）＋結論情報（未知）

と定義している. これに基づいて, 算数文章題は算数物語を構成する 3 つの数量の内の一つを未知にしたものといえる. そして, 残りの二つの既知の数量から未知の数量を演繹することが求められる.

例えば, 減少の物語をベースとした問題は

算数物語（１）
式：８−３＝５
８ −数量関係−> 和の量＝８ −物語−> 初期量＝和の量＝８
３ −数量関係−> 要素量＝３ −物語−> 減少量＝要素量＝３
５ −数量関係−> 要素量＝５ −物語−> 結果量＝要素量＝５

という構成で記述できる. この中で, 例えば, 結果量を未知量とすると

算数文章題（１）
式：８−３＝？
８ −数量関係−> 和の量＝８ −物語−> 初期量＝和の量＝８
３ −数量関係−> 要素量＝３ −物語−> 減少量＝要素量＝３
？ −数量関係−> 要素量＝？ −物語−> 結果量＝要素量＝？

という構成で算数文章題を記述できる.

そして, これを文章にすると

1. りんごが8こあります
2. りんごを3こたべました

3. りんごが？こあります[1]

として？を求める具体的な算数文章題を設定できる.

もう一つ問題が構成されるときに現れる特徴は問題から得られる式が二つになることである. 一つは問題の物語をそのまま表した式, もう一つは未知数を求めるための式である. ここでは, 前者を「問題式」, 後者を「求答式」とよぶ. 例えば, 上記の算数文章題(1)の例では, 問題式は8−3＝？であり, 求答式も同じになる.

しかし, 初期量を未知数とすると,

算数文章題(2)

？ −数量関係−＞ 和の量＝？ −物語−＞ 初期量＝和の量＝？
３ −数量関係−＞ 要素量＝３ −物語−＞ 減少量＝要素量＝３
５ −数量関係−＞ 要素量＝５ −物語−＞ 結果量＝要素量＝５

という役割の対応づけになり, 問題の流れに沿うと式は「？−3＝5」となるが, 解を求めるためには「5＋3＝？」を計算せねばならない. このように問題式と求答式が一致しない場合もある. また, このような問題は算数の世界では逆思考問題とよばれ, 難易度が高いとされている. これは, 解を求めるためには, 問題文の記述の順で数量を認識して立てた数式では無く, 因果関係を追うためにその順序とは逆に数式を立てるからである.

以上のような分析をすることで, 四則数量関係算数問題とは何でどのような種類があるのか, その元となる四則数量関係算数物語との関係はどうなっているのかということを整理することができる. 本研究では, この結果を四則数量関係算数問題オントロジーとしてまとめることを進めている. そして, それと同時にこのオントロジーの上位オントロジーを定義することで, より一般的な, 「問題とは？」, 「問題を解くとは？」, 「問題を作るとは？」, といったことを明らかにすることを目指している. このオントロジー構築に当たっては, オントロジーエディタとして「法造」[古崎 2002]を用いて行っている. これは, 法造のベースになっているオントロジー理論の特徴の一つである, ロールの概念化が優れているからであり, 数量関係役割と物語役割の関係を十分に記述できると同時に, 上位オントロジーとして公開されているYAMATO[Mizoguchi 09]での概念化によって, 問題とその表現のアイデンティティの関係性を適切に記述できるからである.

4. 文章題の構成の理解に基づく作問支援

このような対象の構造分析を行う利点は 2 つある. 一つは対象をより深く理解できるということであり, もう一つはその理解に基づいて学習支援に対する考察を深めることができるということである.

前者の対象の深い理解ということについては, 前節で述べたように構造の分析によって, 対象としている算数物語と算数文章題が何であるかをより深く知ることができる. 例えば, 本稿で挙げた物語式, 問題式, 求答式の区別は, 教師の間では暗黙的に共有され, 指摘されると受け入れられるが, 明示的には示されていないとも言われている. これらを明確にすることが算数文章題を扱う学習支援システムの開発, そして, 算数の指導そのものに影響があると考えている.

[1] ここでは, モンサクンでの単文カードを想定して例文を提示しているため, 利用する単文の再利用性を考慮し瀧術になっているが, この単文は「りんごはいくつのこっていますか？」といった文章の方が実際には自然である

4.1 算数文章題の比較

数量関係役割と物語役割の関係に基づくと, 問題間の違いをより明確に原理的に説明できる.

算数文章題（３）
1. りんごが５こあります・・・・・・【初期量＝要素量＝５】
2. りんごを３こもらいました・・・・【増加量＝要素量＝３】
3. りんごが？こあります・・・・・・【結果量＝和の量＝？】

物語種類：増加物語
問題式：５＋３＝？
求答式：５＋３＝？

このような算数文章題に対して, 問題式と求答式が異なる問題も作成できる. 例えば,

算数文章題（4）
1. りんごが？こあります・・・・・・【初期量＝要素量＝？】
2. りんごを３こもらいました・・・・【増加量＝要素量＝３】
3. りんごが８こあります・・・・・・【結果量＝和の量＝８】

物語種類：増加物語
問題式：？＋３＝８
求答式：８−３＝？

この二つの算数文章題の関係は, 算数文章題(4)は算数文章題(3)と同じ物語に対して, 未知数とする数量を結果量から初期量へと変更した問題である. そして, 算数文章題(4)では問題式の？＋3＝8に対して求答式は8−3＝？となるために, 物語の流れと逆に考えて求答式を構成し, 答えを出さないといけない. これは前述の逆思考問題といえる.

これを提案した枠組みで考えると, 単に「もらいました」だから単純に加算というのではなく, 8が結果量であり, 3は増加量であるということと, 初期量と増加量の和が結果量になることから, 初期量を求めるためには結果量から増加量の減算が必要であるから問題式と求答式が違うといえる. そして, これら二つの問題は, 物語の種類を変えずに問題式の中での未知数を変えることだけで, 求答式が変化している関係となっている. そして, それによって難易度が変わるということを示している. このような, 問題間の同一性と相違性を意識させることによって, 算数物語の構造への理解を深め, 算数文章題をより適切に扱えるようになると考えている.

また, 物語が同じで他が違うという算数文章題(3)と(4)の例とは違い, 求答式は同じでも問題式や物語の種類が異なる問題も作れる. 例えば, 以下のような問題である.

算数文章題（5）
1. りんごが５こあります・・・・・・【部分量＝要素量＝５】
2. みかんが３こあります・・・・・・【部分量＝要素量＝３】
3. りんごとみかんがあわせて？こあります
・・・・・・・・・・・・・・・・・・【全体量＝和の量＝？】

物語種類：合併物語
問題式：５＋３＝？
求答式：５＋３＝？

この算数文章題(5)は算数文章題(3)と求答式と問題式が同じで, 物語種類が異なる例である. 算数文章題(3)は増加の問題であるが, 算数文章題(5)は合併の問題である.

これに対して, 算数文章題(6)では, 求答式は同じであるが, 問題式と物語種類が異なる例を示している.

算数文章題（6）
1. りんごが？こあります・・・・・・【初期量＝和の量＝？】
2. りんごを５こたべました・・・・・【減少量＝要素量＝３】
3. りんごが３こあります・・・・・・【結果量＝要素量＝５】
物語種類：減少の物語
問題式：？−５＝３
求答式：５＋３＝？

この算数文章題では，減少の物語に対して，物語の流れを逆に追って加算で解を求める必要があるために逆思考問題となっており，この問題の中で問題式と求答式が異なっている．

以上で述べたように，同じ数を使っていても物語の種類やその提示順序によって問題式や求答式の形が異なり，必要な解釈や解法が変わってくる．そして，これが算数文章題を解く，作る認知過程に関わっており，難易度が変わってくる．本稿で提案するような構造の分析を行うことによって，これらはすべて数量関係役割と物語役割の関係で説明することができる．そして，これが問題の違いが問題解決や問題作成という認知プロセスにどういう影響を与えるかを考察する基盤になると考えている．

4.2 算数文章題の理解

物語と数量関係の構造を理解していれば，問題を解く際にその記述を順に読んでいくことで，物語の種類，問題式，求答式を絞り込み，決定することができると考えられる．
例えば，前述の算数文章題（6）を使って考えてみる．この問題は一文目を読むだけでは，ベースとなっている物語の種類をほとんど同定できない．少なくとも本稿で挙げている例では，算数文章題（4）とこの時点では区別できず，増加の物語にも減少の物語にもなりえる．ただし，二文目を読むと，これが減少の物語であると分かり，問題式の形式が減算であると分かる．そして，問題式を導出できれば，原理的には未知数を求めるための求答式を決定できる．最終的には三文目を読んで具体的な数値が決定されるので，答えを求めることができる[1]．

このように問題を解く際には順に問題を読むことで，その可能性を絞り込み，構成要素を同定することができる．しかし，問題を作る際にはもう少し複雑になる．問題を作る際にはまず，どのような物語の種類においてどのような求答式を設定するかを決定する必要がある．例えば，増加の物語において，加算で解を求めさせるものや減算で解を求めさせるものである．前者では結果量を求めさせることになるが，後者では初期量を求めさせるものと増加量を求めさせるものの2種類にさらに分けられる．

このように問題を作ることは発散的に思考し，それを条件に合うように収束させていくために問題を解くことより難しいと考えられる．特に単文統合型ではない作問では一般的に使えるオブジェクトの種類や数量などにも制約が無いので，バリエーションが多く簡単に発散してしまう．これを解消するために，平嶋らのモンサクンでは単文統合型の作問課題を提案しており，予め利用できる単文を限ることによって，その探索空間を限定している．しかし，問題構造を理解する上で必要な，物語の種類と数量関係，要求する問題式や求答式といった要素に基づいて思考することを求めるため，問題構造の理解に役立つと考えられる．また，学習支援システムとして構成することによって，作問課題の実施回数を増やすと共に，即時的な正誤のフィードバックによって学習効果を高めていると言える．

5. おわりに

学習支援システム研究のゴールは，効果的な学習支援システムを設計・開発するための技術を確立することである．また，情報技術に対しては，従来の教具では実現できなかった学習支援を実現するということも期待される．その実現には 2 つのパスがある．一つは教育学や教育現場で検討されていたが実現が難しい・不可能であったものを情報技術によって実現することである．もう一つは情報工学的な立場から学習対象を捉えることによって新しい解釈を行うことを通じて実現することである．本研究は，後者の立場に立って研究を進めているつもりである．そして，その目的のために平嶋らの研究をベースに，算数における加減算という非常に限られた範囲ではあるが，問題の構造を分析し，その結果を元に問題解決と問題作成に関する学習内容の情報工学的な分析を行った．その結果として，算数文章題の基本構造の抽出した結果を本稿で示している．今後はこれを洗練していくと共に，実践の場で実証的に検証していく予定である．

ただし，算数の文章題という限られた範囲を対象としているために，非常に限定的な研究に見えるかもしれない．しかし，対象をまずは固定することによって深く分析することができ，高度な支援を実現する可能性も高まる．また，限定しているからといっても本研究の目標の一つは，問題とは何かを考察することを通じて，問題解決過程と問題作成過程の違いを明らかにすることで，作問学習の有用性を原理的にも実用的にも示すことにある．もちろん，この立場では，その新しい情報工学的な解釈が効果的であるかだけでは無く，教育の文脈で妥当であるかを検証することが求められる．今後もその点にも考慮しながら教育現場での実践も含めて研究を進めていくことも重要である．

参考文献

[平嶋 2005] 平嶋 宗:「問題を作ることによる学習」の分類と知的支援の方法，教育システム情報学会研究報告，Vol.20，No.3，pp.3-10, 2005.
[平嶋 2009] 平嶋宗:作問学習のモデル化,第 23 回人工知能学 会全国大会, 2D1-OS11-10(2009)
[古崎 2002] 古崎晃司，來村徳信，池田満，溝口理一郎:「ロール」および「関係」に関する基礎的考察に基づくオントロジー記述環境の開発，人工知能学会論文誌,Vol.17,No.3,pp.196-208,2002
[倉山 2012] 倉山めぐみ，平嶋宗:逆思考型を対象とした算数文章題の作問学習支援システム設計開発と実践的利用，人工知能学会論文誌，Vol.27, No.2, pp.82-91(2012).
[Mayer 1981] Mayer, R.E.: Frequency norms and structural analysis of algebra story problems into families, categories, and templates. Instructional Science, 10, pp.135-175(1981).
[Mayer 1982] Mayer, R.E.: Memory for algebra story problem. Journal of Educational Psychology, 74, pp.199-216 (1982).
[Mizoguchi 09] Mizoguchi R: Yet Another Top-level Ontology: YATO, Proc. of the Second Interdisciplinary Ontology Meeting, pp.91-101 (2009)
[Polya 1957] Polya, G. :How to solve it: A new aspect of mathematical method, Princeton University Press, (1957)
[Silver 1996] Silver, E.A., Cai, J.: An Analysis of Arithmetic Problem Posing by Middle School Students, Journal of Research in Mathematics Education, vol.27, No.5, pp521-539, (1996)
[Riley 83] Riley, M.S., Greeno, J.G., Heller J.I.: Development of Children's Problem-Solving Ability in Arithmetic., The Development of Mathematical Thinking, Ginsburg H. (ed.), Academic Press, pp.153-196(1983).

1 ただし，実際に児童がどのように思考しているかは分からない