3F3-02

複数ユニット組合せオークションの高速近似における真実申告最良性の実現に関する一考察

A Preliminary Analysis on Approximation Approaches and Truthful Multi-unit Combinatorial Auctions

福田 直樹*1
Naoki FUKUTA

*1静岡大学大学院情報学研究科
Graduate School of Informatics, Shizuoka University

1. はじめに

組合せオークション [Cramton 06] は，単一の財のみでなく，財の組合せに対して入札を行うことができるようなオークションであり，実世界の問題への適用のための，様々な応用的実現・実装方法も検討されてきた [Sandholm 05]．資源配分問題としては，たとえば，FCC においての電波周波数帯域オークション問題への適用の検討がされている [McMillan 94]．

一方で，組合せオークションでは，その勝者決定や価格付けにおいて，厳密な計算を行おうとすると，極めて多くの計算を必要とすることが課題となっている [Cramton 06]．この課題を解決するために，Zurel らによる近似線形プログラミングに基づく手法 [Zurel 01] など，多くの手法が検討されてきている．著者らも，これまでに並列探索に基づく手法 [Fukuta 06] を提案してきており，その性能や性質に関する解析 ([Fukuta 09][Fukuta 07][Fukuta 10]) によって，その性能は，商用の高速な線形プログラミング (LP) ソルバーを大きく上回る場面もあることが示されている．

それらの多くの解析結果は，複数ユニット組合せオークションには適用できない場合も多くあったが，文献 [Fukuta 11] で最初に示したアルゴリズムでは，その性質の多くを複数ユニット組合せオークションの近似に拡張することを可能としており，条件によっては良好な解の近似性能を持つことが報告されている [Fukuta 13]．このアルゴリズムでは，勝者の近似以外にも，高速な価格付けを近似的に行う手法についても提案しており，比較的大規模な問題への，価格決定メカニズムを含む組合せオークションの適用が期待される．しかしながら，近似を伴う高速な複数ユニット組合せオークションの実現と真実申告最良性などの種々の性質との関連については，文献 [Fukuta 13] などでは必ずしも十分に言及されなかった．

本論文では，まず，近似を伴う高速な組み合わせオークションの手法として，Lehmann らの手法 [Lehmann 02] に着目し，その複数ユニット組合せオークションへの拡張をダミー財を用いる XOR 入札の表現手法に基づいた拡張およびその限界について考察する．次に，文献 [Fukuta 13] における価格付け手法との性質の違いをまとめ，その利害得失について議論する．

本論文の以降の構成は，次のようになっている．２節では，本論文の議論を進めるにあたって必要となる事項である，複数ユニット組合せオークションとその近似計算方法について，過去の関連研究をまとめる．次に，３節では，Lehmann らの手法をダミー財を用いた XOR 入札を扱う場合について拡張し，その延長上でどのように複数ユニット組合せオークションが扱えるかを示す．４節で，残された課題について述べる．最後に，５節で本論文のまとめと今後の課題を示す.

連絡先: 福田直樹，静岡大学大学院情報学研究科，432-8011 浜松市中区城北 3-5-1，fukuta (at) cs.inf.shizuoka.ac.jp

2. 準備

2.1 複数ユニット組合せオークション

文献 [Cramton 06] によれば，組合せオークションの勝者決定問題は次のように定義される: 入札者を $N = \{1, \ldots, n\}$，入札対象となる財の集合 $M = \{1, \ldots, m\}$（入札対象となる財の総数 $|M| = m$）とする．また，財のバンドル S は財の部分集合 $S \subseteq M$ とする．このとき，ある入札者 i における財のバンドル S に対する入札価格を $v_i(S)$ と表現する．財の割り当ては，変数 $x_i(S) \in \{0, 1\}$ で表現し，$x_i(S) = 1$ のときに，バンドル S を入札者 i が落札したことを示す．ここで，財の割り当て $x_i(S)$ が妥当 (feasible) であるとは，どの１つの財も高々１つの落札者に対して落札される状態，すなわち，

$$\forall j \in M \sum_{i \in N} \sum_{S \ni j} x_i(S) \leq 1$$

が成り立つことをいう.

勝者決定問題とは，妥当 (feasible) な財の割り当てから勝者の入札額の合計が最大となるような $X \ni x_i(S)$ を見つけ出すこと，すなわち

$$\max_X \sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq M} v_i(S) x_i(S)$$

を求めることである.

ここで，いくつかの財が，互いに同一視でき相互に交換可能 (indistinguishable) である場合を考える．この条件を満たす場合を，複数ユニット組合せオークションと呼ぶ．複数ユニット組合せオークションは，本質的には，単一ユニット組合せオークションで，特定の財同士を同一視し，それらを入れ替え可能とするような財バンドルへの入札を行っているものと等しい.

入札の表現に OR 表現 [Leyton-Brown 00] を用いた場合，複数ユニット組合せオークション問題は，単純な単一ユニット組合せオークション問題に帰着できる.

例: 今ここに，５つの財 a,b,c,d, および e があり，このうち，a, b,　および c は同じ種類の (indistinguishable な) 財であるとする．財 a を財バンドルに含むあらゆる複数ユニット組合せオークション入札は，財 a を 財 b あるいは c に置き換えた財バンドルによる入札を含めて，3 つの単一ユニット組合せオークション入札に分解できる．これらに対して，落札の

排他性を表現するには，ダミー財 x を用いる．たとえば，今ここに，財バンドル {a,b} に対して価格として 4 をつけた入札 $< 4, \{a, d\} >$ があるとする．この入札は，OR 入札表現を用いた単一ユニット組合せオークション問題における 3 つの入札 $< 4, \{a, d, x\} >$, $< 4, \{b, d, x\} >$, および $< 4, \{c, d, x\} >$ により表現できる．ただし，ダミー財 x は他のダミー財とは同じ種類とみなされないものとする．

この方法による複数ユニット組合せオークション問題の単一ユニット組合せオークション問題への展開は，容易に入札数の爆発を引き起こす．たとえば，ある 3 つの種類 t, u, および v の財がオークションにかけられており，それぞれの種類の財について出品数が 50, 100 および 200 であったとする．ここで，財バンドルに t, u, および v の種類の財を 1 つずつ含むような入札を考えると，これは $50 \cdot 100 \cdot 200 = 1,000,000$ もの単一ユニット組合せオークション問題での OR 表現による入札に展開されることになる．財の種類や各種類ごとのオークションへの出品数が大きくなった場合，それを単一ユニット組合せオークション問題に展開した場合には，それに対して現実的な時間内で勝者決定を行うことは，近似的なアルゴリズムを用いた場合であっても困難である．

このような問題があるにもかかわらず，多くの場合では，組合せオークションの勝者決定問題の近似は，単一ユニット組合せオークションを対象に行われる場合がほとんどである．たとえば，Zurel らは，文献 [Zurel 01] で，OR 入札表現による単一ユニット組合せオークションに対して非常に高速な近似的勝者決定アルゴリズムを示している．また，Lehmann らも，文献 [Lehmann 02] にて，同様な条件下での高速な近似的勝者決定が可能なオークションメカニズムを提案している．また，我々も，同様の条件下で Zurel らの手法と同等の近似最適性性能を短時間で計算可能な手法を提案してきた．最適解への到達性を保証したものには，Sandholm らの CABOB がある [Sandholm 05]．しかしながら，いずれの場合でも単一ユニット組合せオークションのみを対象にしており，複数ユニット組合せオークションへの拡張については議論されていない．

2.2 Lehmann らの近似的割当てに基づく手法

Lehmann らが提案した欲張り (greedy) アルゴリズム [Lehmann 02] に基づくオークションメカニズムは，組合せオークションにおける勝者決定問題に対する，非常に簡潔で強力な線形アルゴリズムを持つ．Lehmann らの欲張りアルゴリズムは，次のように記述される．(1) 入札のリスト L は，ある指標に基づいて順序づけされる．文献 [Lehmann 02] では，この L の順序づけには，財 1 つあたりの入札価格が用いられる．より一般的には，ある数 $c \geq 0$ に対して，$a/|s|^c$ で定義される重み値に基づいて順序づけされる．(2) 欲張りアルゴリズムに基づいて，財の割り当てが決定される．ここで，入札のリスト L は，先の式に基づいて順序づけされている．本アルゴリズムでは，この入札のリストを上位から順に見て，その入札の持つ財バンドルすべてが未割り当てのものを，順に勝者として財に割り当てていく．

文献 [Lehmann 02] で Lehmann らは，単一ユニット組合せオークションでは，$c = 1/2$ が，最悪時の割り当ての下限を保証することを考えた場合の，最適な値であるとしている．また，Lehmann らは，彼らが文献 [Lehmann 02] で提案した価格付け手法を用いた場合に，単一バンドル選好を仮定すれば，そのオークションが真実申告最良になることを示している．これらが複数ユニット組合せオークションにそのまま適用できるかどうかは文献 [Lehmann 02] には直接的には示されていない．

この価格付け手法の概要を次にまとめる．ここで，$S \cap S' = \phi$ ではない財バンドル $S, S' \in M$，に対する 2 つの入札 $x_i(S), x_j(S'), i, j \in N$ について，$x_i(S) = 1$ かつ $x_j(S') = 0$ であり，入札に対する評価値関数 vl について $vl(v_i(S), |S|) >= vl(v_j(S'), |S'|)$ であるもので最大の vl の値を取るものを j とすると，その落札額は関数 $pl(v_j(S'), |S'|, |S|)$ で与えられる．直感的な表現をすれば，ある勝者入札が勝者でありつづけられるギリギリの入札額をもって，その勝者の落札額とする，ということになる．これは，落札額がクリティカル値 (critical value) 条件を満たすという形で，文献 [Lehmann 02] では示される．

2.3 勝者近似と価格付け

文献 [Fukuta 06]，[Fukuta 09]，および [Fukuta 10] 等で，Lehmann のアルゴリズム [Lehmann 02] によって得られた結果を並列山登り法に基づくアプローチで拡張することで，シミュレーテッドアニーリング法 (SA) に基づくアプローチ [Fukuta 06], SAT ソルバの応用に基づくアプローチ [Hoos 00], 線形計画法 (LP) の近似に基づくヒューリスティックなアプローチ [Zurel 01], および 商用の LP ソルバーに対して，多数の入札がある環境下において，一定の性能面での優位性を持つことが示されている．しかしながら，この並列山登り法に基づくアプローチは，その処理の高速化のアプローチが単一ユニット組合せオークションに強く依存した方法となっているので，そのままでは複数ユニット組合せオークションには適用できない．そこで，文献 [Fukuta 11] では，複数ユニット組合せオークションへの適用が可能となるような，このアルゴリズムへの拡張が述べられており，複数ユニット問題のみでなく単一ユニット問題でも良好な結果が得られることが，示されている [Fukuta 13]．一方で，これらの近似的手法による価格付けまでを行った場合に，真実申告最良性をどのような制約下でどこまで実現可能であるかは，議論の対象となりうる．

組合せオークションのメカニズムでは，決定された勝者に対して適切な価格付け (pricing) がなされることが重要である．VCG(Vickrey-Clarke-Groves) メカニズムでは，勝者となった入札に対して，次のように価格が決定される [Cramton 06]．勝者となった入札者 n に対する支払い価格 p_n は，

$$p_n = \alpha_n - \sum_{i \neq n, S \subseteq M} v_i(S) x_i(S)$$

によって計算される．ここで，右辺の右側の項は，勝者となった入札者 n を除いた他の勝者の入札価格の合計である．また，右辺の α_n は，妥当な財の割り当て $X \ni x_i(S)$ に対して，

$$\alpha_n = max \sum_{i \neq n, S \subseteq M} v_i(S) x_i(S)$$

と定義される．すなわち，これは勝者となった入札者 n が参加しなかったものとして改めて勝者決定を行った場合の勝者の入札価格の総和である．

文献 [Nisan 00] では，VCG の価格付けを用いた場合，必ず最適勝者を求める必要があると指摘している．Lehmann らは，VCG メカニズムでの価格付けを彼らの近似勝者決定方法に用いた場合，単一バンドル選好の入札者を仮定しても真実申告最良とはならないことを示している [Lehmann 02]．

ここで起きる主な問題は，勝者が支払うべき価格が，勝者が入札した価格よりも高くなってしまうという現象から生じる．勝者決定方法が近似である場合，勝者となった入札者を除いて改めて勝者決定を行った場合の勝者の総入札価格が，むしろ高くなってしまう場合がある．つまり，$\alpha_n > \sum_{i \in N} v_i(S) x_i(S)$

となる場合である．その場合，VCG による価格付けは，その勝者の入札価格よりも高いものになってしまうため，勝者は落札したことによって効用が負となってしまい（つまり個人合理性を明らかに満たさず），勝者に対して真実の評価値より低い価格を申告することで落札されないようにしたいと思う誘因を与えてしまう．

Lehmann らの手法では，greedy な割り当てに特化した勝者価格決定方法を導入することで，この問題を回避している [Lehmann 02]．しかしながら，Lehmann らの勝者決定方法は，逐次更新に基づくアプローチなどの，他の勝者近似手法にはそのままでは適用できない．また，このオークションが真実申告最良性を満たすのは，入札者に対して単一バンドル選好を仮定したときのみである [Lehmann 02] のに対し，ダミー財を用いた XOR 入札を用いてしまうと，１つの入札者が複数の財バンドルに対する入札を持つことになるため，この単一バンドル選好の条件が満たされなくなる．この点についての議論は，文献 [Lehmann 02] では述べられていない．

より厳密に議論を行うことを考えると，真実申告最良性を満たすためには，最適勝者を求め，VCG による価格付けが行われるだけでは十分ではない．たとえば，扱う問題が「オンラインオークション問題」である場合，すなわち，オークションへの参加や離脱が自由であり，そのオークションがその場面ごとに勝者を決定していかなければならない場合には，これらの条件が満たされた場合であっても真実申告最良性が満たされないことが，示されている [Hajiaghayi 04].

3. Lehmann 手法の XOR 入札への拡張

Lehmann らの手法 [Lehmann 02] では，各エージェントが入札を行う際に単一バンドル選好 (single minded) であるときにのみ，その価格決定まで含めたオークションメカニズムが真実申告最良性を満たす (truthful である) とされる．本節では，この Lehmann らの手法が特定の条件下では XOR 入札にも容易に拡張できること，および，その拡張が複数ユニット組合せオークション問題と等価になることが容易に示せることについて述べる．ここでは，議論を簡単化するために，まずは入札に架空名義によるものは含まないという仮定の下に議論を開始し，誌面の都合で厳密な証明ではなく証明のスケッチのみを示すことにする．

単一バンドル選好とは，各エージェントが入札として顕示できるタイプが，単一の財バンドルに対する１つの価格提示に限られるという意味である．一般には，落札のされた財の廃棄にコストがかからないこと (free dsiposal) を仮定して，入札を「単一の財バンドルに対する入札価格」として提示するため，入札数は高々エージェント数となる．ここで，もしも,「商品 A または B のいずれか１つがあればよく，それに最大で 10 のお金を支払ってもよい」というような種類の入札 (これを XOR 入札と呼ぶ) や,「商品 A と B の組に最大で 10 のお金を支払ってもよく，その商品 A と B の組に対する選好とは独立に，商品 C と D の組に最大で 20 のお金を支払っても良い」というような種類の入札 (これを OR 入札と呼ぶ) を扱えるようにすると，これらは単一の財バンドルに対する選好ではないため，Lehmann らの手法では真実申告最良性を満たせなくなる．

ここで，単一バンドル選好という条件を少しだけ緩め，財バンドルの大きさ (そこに含まれる財の数) とそれらへの入札額が全く同一であり，そのうちの高々１つしか落札できないような入札を行えるようにする場合について考える．これはたとえば,「商品 A または B のいずれか１つがあればよく，それに最大で 10 のお金を支払うことができる」ということを示す入札を，ダミー財 X を用いて，$<10,\{a,x\}>$, $<10,\{b,x\}>$ と示し，このような２つの入札を同時に行うことを許すということである．

Lehmann らの手法によれば，この場合，財バンドルの大きさおよび入札額がいずれも同値であることから，これら２つの入札に対する整列順位は同順位となる．ここで，もしこれらの財のうちの片方である $<10,\{a,x\}>$ が勝者となった場合[*1]，単純に Lehmann らの手法を適用すると，その落札価格を求めるクリティカル値 (critical value) は，その勝者入札が勝者で居続けられる最低の価格であり，これは他方の入札である $<10,\{b,x\}>$ の入札額，すなわちもとの入札の価格と同一となる．すなわち，落札価格が勝者の入札価格により決まってしまうことから，このままではこのオークションは真実申告最良とならない．

ここで，価格決定の際に，ある勝者入札のクリティカル値を求めるための手続きから，その同一の入札者による入札を除外することを考える．先の例では，クリティカル値の計算から $<10,\{b,x\}>$ を除外することを意味する．この場合の入札 $<10,\{a,x\}>$ に対するクリティカル値の計算は，$<10,\{b,x\}>$ という入札がなされなかった場合と同値となり，これは勝者入札者の入札価格以外によって決まることになる．このような拡張を行えば，Lehmann らの手法をその性質を損なうことなく前述の限定的な XOR 入札を伴うオークションに拡張できる．

すでに述べたとおり，複数ユニット (組合せ) オークションは，特定の財の組が indistinguishable な財であるとしてダミー財と OR 表現を用いて表せる．すなわち上述の限定的な XOR 入札を伴う (組合せ) オークションとは，複数ユニット (組合せ) オークションと同値である．

前述の通り，XOR 入札を用いて単一ユニット組合せオークション問題を複数ユニット組合せオークション問題に拡張すると，組み合わせ爆発による入札数の増大を招く．しかしながら，上記のように入札価格と財バンドルの大きさの両者が同一となるような複数の入札の組全体を１つのコンパクトな入札として表現しておき，入札に対する勝者決定を効率的に処理できるように実装することで，実際の勝者決定等の計算処理を効率的に行うことができる．文献 [Fukuta 13] などでは，そのような実装を用いている．

4. 議論

前節で述べた条件をさらに緩めた場合，一般には真実申告最良性は崩れる．たとえば，XOR 入札の表現から，財バンドルの大きさが同一であるという条件を外すと，Lehmann らの手法での入札評価値計算に用いるパラメータ c が $c>0$ であるとき（すなわち，財バンドルの大きさが入札評価値計算に影響を与える場合）には真実申告最良性が保てなくなる．これは次の反例から明らかである．簡単のために，入札者が１名のみである場合を考える．この入札者が，$<10,\{a,b,x\}>$ および $<10,\{d,x\}>$ の２つの入札からなる XOR 入札を行った場合には，$c>0$ の場合には，入札に対する Lehmann らの手法による評価値が必ず後者のほうが高くなることから，$<10,\{d,x\}>$ が勝者となることはあっても，$<10,\{a,b,x\}>$ が勝者となることはない．このため，実際にこのような選好を持っていたとしても，そのことを入札で表明することに対する誘因がないことになる．すなわち，真実申告最良性が満たされない．

---

*1　厳密にはこれら２つの入札のうちいずれが勝者となるかは不定，あるいは確率的に決定される．

前節の条件を XOR 入札から OR 入札に拡張した場合，すなわち，特定の入札者による入札の間でダミー財 x が共有されない場合について考える．もしも，入札の財バンドルの大きさおよび入札価格が同一の OR 入札のみを扱う場合には，同様な拡張が可能である．財バンドルの大きさが異なる場合を許すと，greedy 割当ての性質から，同一の入札者の複数の入札のうち，Lehmann らの手法による入札評価値が高い入札が勝者となることが，他の入札が勝者となるかどうかに影響を与えてしまうため，入札価格に対する単調性 (monotonicity) を満たせなくなる．したがって，価格付けの場面で仮に勝者の落札価格にその勝者自身の入札価格が影響を与えなかったとしても，勝者決定問題の段階で真実申告最良性が満たされなくなる．

ここで，前述の OR 入札への拡張の際に，勝者決定の際の入札評価値に基づく整列を，各入札ごとではなく，入札者単位で行えるようにすると，入札価格に対する単調性を満たせる可能性が出てくる．一方で，たとえば入札者評価値として各入札の Lehmann 手法による評価値の平均を取るような場合を考えると，入札者がなんらかの手段で，自身が落札対象としていない単一財で，その入札額を各入札の評価値の平均より高くした場合でも落札される恐れがないものについての情報を知っていれば，その単一財に対する入札を自身の OR 入札に組み入れることで，自身の入札者としての評価値を高くすることができてしまうことから，真実申告最良性が満たされなくなる．また，詳細な証明は割愛するが，OR 入札を許す場合には，文献 [Todo 09] における架空名義入札への頑健性が満たされないことも容易に示される．

5. まとめ

本論文では，Lehmann らの手法 [Lehmann 02] を制限付き XOR 入札を許すように拡張することで，複数ユニット組合せオークション問題に適用できることを示した．また，その制限をさらに緩めた場合には，Lehmann らの手法のもつ真実申告最良性が満たせなくなることについて述べた．

謝辞

本研究の一部は，日本学術振興会科学研究費補助金 若手 (B) 22700142 の支援による．

参考文献

[Cramton 06] Cramton, P., Shoham, Y., and Steinberg, R.: *Combinatorial Auctions*, The MIT Press (2006)

[Fukuta 06] Fukuta, N. and Ito, T.: Towards Better Approximation of Winner Determination for Combinatorial Auctions with Large Number of Bids, in *Proc. of The 2006 WIC/IEEE/ACM International Conference on Intelligent Agent Technology(IAT2006)*, pp. 618–621 (2006)

[Fukuta 07] Fukuta, N. and Ito, T.: Periodical Resource Allocation Using Approximated Combinatorial Auctions, in *Proc. of The 2007 WIC/IEEE/ACM International Conference on Intelligent Agent Technology(IAT2007)*, pp. 434–441 (2007)

[Fukuta 09] Fukuta, N. and Ito, T.: Fine-grained Efficient Resource Allocation Using Approximated Combinatorial Auctions–A Parallel Greedy Winner Approximation for Large-scale Problems, *Web Intelligence and Agent Systems: An International Journal*, Vol. 7, No. 1, pp. 43–63 (2009)

[Fukuta 10] Fukuta, N. and Ito, T.: An Experimental Analysis of Biased Parallel Greedy Approximation for Combinatorial Auctions, *International Journal of Intelligent Information and Database Systems*, Vol. 4, No. 5, pp. 487–508 (2010)

[Fukuta 11] Fukuta, N.: Toward a VCG-like Approximate Mechanism for Large-scale Multi-unit Combinatorial Auctions, in *Proc. IEEE/ACM/WIC International Conference on Intelligent Agent Technology(IAT2011)*, pp. 317–322 (2011)

[Fukuta 13] Fukuta, N.: An Approach to VCG-like Approximate Allocation and Pricing for Large-scale Multi-unit Combinatorial Auctions, *Journal of Information Processing*, Vol. 21, No. 1, pp. 9–15 (2013)

[Hajiaghayi 04] Hajiaghayi, M. T., Kleinberg, R., and Parkes, D. C.: Adaptive limited-supply online auctions, in *Proc. 5th ACM Conference on Electronic Commerce (EC'04)*, pp. 71–80 (2004)

[Hoos 00] Hoos, H. H. and Boutilier, C.: Solving Combinatorial Auctions using Stochastic Local Search, in *Proc. of the Proc. of 17th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI2000)*, pp. 22–29 (2000)

[Lehmann 02] Lehmann, D., O'Callaghan, L. I., and Shoham, Y.: Truth revelation in rapid, approximately efficient combinatorial auctions, *Journal of the ACM*, Vol. 49, pp. 577–602 (2002)

[Leyton-Brown 00] Leyton-Brown, K., Pearson, M., and Shoham, Y.: Towards a Universal Test Suite for Combinatorial Auction Algorithms, in *Proc. of ACM Conference on Electronic Commerce (EC2000)*, pp. 66–76 (2000)

[McMillan 94] McMillan, J.: Selling Spectrum Rights, *The Journal of Economic Perspectives* (1994)

[Nisan 00] Nisan, N. and Ronen, A.: Computationally feasible VCG mechanisms, in *Proc. of ACM Conference on Electronic Commerce*, pp. 242–252 (2000)

[Sandholm 05] Sandholm, T., Suri, S., Gilpin, A., and Levine, D.: CABOB: A Fast Optimal Algorithm for Winner Determination in Combinatorial Auctions, *Management Science*, Vol. 51, No. 3, pp. 374–390 (2005)

[Todo 09] Todo, T., Iwasaki, A., Yokoo, M., and Sakurai, Y.: Characterizing False-name-proof Allocation Rules in Combinatorial Auctions, in *Proc. 8th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS2009)* (2009)

[Zurel 01] Zurel, E. and Nisan, N.: An efficient approximate allocation algorithm for combinatorial auctions, in *Proc. of the Third ACM Conference on Electronic Commerce (EC2001)*, pp. 125–136 (2001)